Les Suites

I. Généralités sur les suites : Dans tout le cours, on considère des suites (u_n)définies sur N les entiers naturels. Une suite est une fonction de Ħ dans ĩ qui peut être défini de différentes façons :

- Comme une fonction n #f(n) donc $u_n = f(n)$
- Par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples ?

1. Suites croissantes, suites décroissantes

Définitions

Une suite (u_n) est croissante ssi pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est décroissante ssi pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Remarques :

- Une suite toujours croissante ou décroissante sont dites monotones.
- Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes.

COMMENT LE Démontrer ?

II. Suites Arithmétiques

1. Définitions

Une suite (u_n) est arithmétique ssi il existe un réel r tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé raison de la suite.

2. Calcul de u_n

Théorème 1 : Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors pour tous les entiers n et p :
$u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n - p)\,r$.

Remarques :

- La première formule n'est qu'un cas particulier de la seconde.
- Si $u_n = an + b$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

Propriété

Lorsqu'une suite est arithmétique sa représentation graphique est constitué de points alignés. Lorsque la représentation graphique d'une suite est constituée de points alignés, cette suite est arithmétique.

COMMENT Démontrer qu'une suite est arithmétique ?

3. Somme des (n + 1) premiers termes

Théorème 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, et si $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, alors pour tout entier n : $S_n = (n + 1)\,\frac{u_0+u_n}{2} = (n + 1)\frac{2u_0+nr}{2}$

4. Progression arithmétique

Lorsqu'on ne considère qu'un nombre fini de termes d'une suite arithmétique, on dit que ces termes sont en progression arithmétique.

III. Suites géométriques

1. Définition

Une suite (u_n) est géométrique ssi il existe un réel r tel que pour tout n, $u_{n+1} = r\, u_n$.
r est appelé raison de la suite.

2. Calcul de u_n

Théorème 3

Si (u_n) est une suite géométrique de raison r, alors pour tous les entiers n et p :

$u_n = u_0\, r^n$ et $u_n = u_p\, r^{n-p}$

Remarques :

- la première formule n'est qu'un cas particulier de la seconde ;
- si $u_n = b\, a^n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

COMMENT Démontrer qu'une suite est géométrique ?

3. Sommes des (n + 1) premiers termes

Théorème 4 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison r, et si $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, alors pour tout entier n :

$S_n = u_0\left(\dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right)$ si $r \neq 1$; $S_n = (n + 1)u_0$ si r = 1.

4. Progression géométrique

4. Progression géométrique : Lorsqu'on ne considère qu'un nombre fini de termes d'une suite géométrique, on dit que ces termes sont en progression géométrique.

IV. Comportement à l'infini !

1. Convergence vers l

   Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $u_n = a^n$ avec $-1 < a < 1$,

   alors : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

   Notion de limite : Soit l un réel, si, à partir d'un certain rang n , $|u_n - l|$ tend vers 0 alors (u_n) converge vers l et on note : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$

2. Divergence vers l'infini

   - Les suites de terme général n, n², n^3, $\sqrt{n}$, a^n avec $a>1$, divergent vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$
   - Une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$ et on note alors : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$
   - Il existe des suites qui divergent, sans avoir de limite infinie, par exemple :

   $$u_n = (-1)^n.$$

3. Opérations : Les règles opératoires sur les limites de suites (somme, produit, quotient) sont les mêmes que pour les limites en $+\infty$ d'une fonction

EXERCICES SUR LES SUITES

Exercice de remise en forme…

On donne, dans le tableau suivant, le nombre d'inscrits sur la liste électorale d'une petite commune pour les années de 1990 à 2000.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'inscrits	1323	1313	1304	1297	1288	1289	1281	1271	1258	1248	1243

1°) On note P_n le nombre d'inscrits sur la liste électorale pour l'année n.
Donner la valeur de P_{1992} et P_{1998}

2°) Calculer $P_{1994} - P_{1993}$. Que représente ce nombre ?
Calculer $P_{1995} - P_{1994}$. Que représente ce nombre ?

3°) Peut-on dire que la suite des nombres P_n est une suite décroissante lorsque n varie de 1990 à 2000 ?

Exercice

On définit une suite (u_n) par : $u_n = 17\ 243 - 8n$ pour tout entier n.

On a par exemple, en remplaçant n par 10 : $u_{10} = 17\ 243 - 8 \times 10 = 17\ 163$

1°) Calculer u_0 ; u_1 ; u_{1990} ; u_{1991} ; u_{1992} .

2°) Calculer $u_1 - u_0$; $u_{1991} - u_{1990}$; $u_{1992} - u_{1991}$

3°) En remplaçant n par n+1 dans l'expression de u_n montrer que
pour tout entier n : $u_{n+1} = 17\ 235 - 8n$
En déduire que, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = -8$

4°) En utilisant la relation $u_{n+1} - u_n = -8$, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n - 8$ compléter le tableau suivant.
La suite (u_n) est-elle une suite décroissante ?

n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
u_n	1 323										

5°) Représenter graphiquement la suite (u_n) lorsque n varie de 1990 à 2000.

Exercice : variations…

Étudiez le sens de variation des suites suivantes : $U_n = \dfrac{n}{3^n}$ et $v_n = \dfrac{2n-5}{n+1}$

Suites arithmétiques

Exercice 1

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r. a. $u_5 = 7$, $r = 2$. Calculez u_1, u_{25}, u_{100}.
b. $u_3 = 12$, $u_8 = 0$. Calculez r, u_0, u_{18}. c. $u_7 = \dfrac{7}{2}$, $u_{13} = \dfrac{13}{2}$. Calculez u_0.

Exercice 2 : Une suite arithmétique u est telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.
Calculez u_0 et la raison.

Exercice 3 : Déterminez sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

Exercice 4 : Existe-t-il une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?

Exercice 5 : Soit (u_n) une suite telle que $u_4 = -4$ et $u_7 = \frac{1}{2}$.

a. On suppose la suite arithmétique. Calculer u_3, u_5, u_0. Plus généralement, exprimer u_n en fonction de u_p et de la raison r , pour n et p entiers quelconques.
Calculer S_5 et S_{10}. Étudier la convergence de (u_n).
b. Mêmes questions si (u_n) est supposée géométrique.

Suites géométriques et arithmétiques, calculs de sommes

Exercices de remise en forme

On considère v(n) une suite géométrique de raison q.
1°) Justifier que $v(3) = v(2) \times q$ et que $v(4) = v(3) \times q$
En déduire que $v(4) = v(2) \times q^2$
2°) Montrer que $v(8) = v(5) \times q^3$
3°) Quelle relation peut-on écrire entre v(7) , v(2) et q ? Justifier.
4°) On suppose dans cette question que $v(0) = 3$ et $q = 2$.
Calculer v(5) .
Donner sans démonstration la valeur de v(100) .

Exercice 6
Une suite géométrique v est croissante et ses termes sont strictement négatifs.
Justifiez que la raison b de la suite est telle que $0<b<1$.

Exercice 7
Calculez les sommes S et S'.

$S = 2 + 6 + 18 + \ldots + 118\,098$ et $S' = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{2}{59049}$

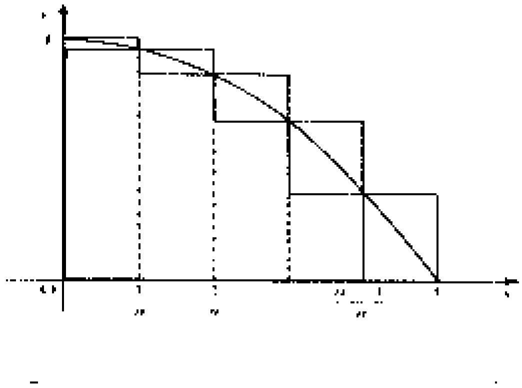
Exercice 8 : Une horloge sonne toutes les heures. Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

Exercice 9 : Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années, quel est l'âge de chacune des personnes ?

Exercice 10 : La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

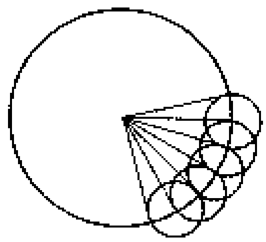
Exercice 11 : Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 1985, il coûtait alors 150F. Quel est son prix à la bourse aux livres de 1990 ? de 1995 ?

Exercice 12 : On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la portion de parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère (voir figure).
Pour cela, on divise [0,1] en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n de la région contenant A et l'aire A'_n de la région contenue dans A.

a. Calculer A_n et A'_n en fonction de n. (On admettra la formule : $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$). b. Calculer An et A'n pour n = 10, 10², 103, 104, 105, 1010 à l'aide d'une calculatrice. Quel résultat semble se dégager ? c. Prouver ce résultat et en déduire la valeur de A.	

Limites et convergences de suites

Exercice 13 Une rosace
On partage un cercle de rayon 1 en n parties égales et on dessine une rosace comme sur la figure ci-après .
Soit l_n la somme des périmètres des petits cercles tracés et soit s_n la somme des aires des petits disques tracés.
On se demande si : l_n va tendre vers 0 car les cercles sont de plus en plus petits ; l_n va tendre vers $+\infty$ car il y a de plus en plus de cercles ; l_n va tendre vers une valeur finie. Trouver le bon résultat par le calcul et faire le même travail pour s_n.



On admettra que pour x positif assez petit : $\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

Exercice 14 : **Vous montrerez que chaque suite proposée a pour limite *l***

$$U_n = \frac{1}{n+3},\ l = 0\ ;\ u_n = n^2 + 1,\ l = +\infty$$

Exercice 15 : Vous montrerez que les suites proposées tendent vers une limite que vous préciserez. $U_n = \frac{3}{2\sqrt{n+7}}$; $U_n = \frac{n^2-1}{2n^2+1}$;

Exercice 16 : a. Vérifiez que la suite $\left(\frac{4^n}{n^2}\right)$ est croissante.

Exercice 17 : Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$.
a. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite. Quel semble être la limite de (u_n) ? b. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2-4$ est géométrique. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

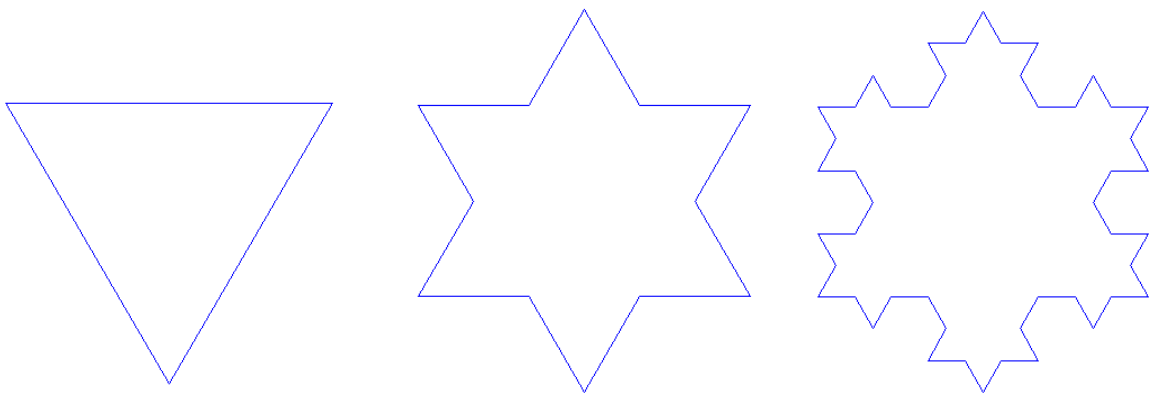
Exercice complémentaire…

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(n)											
a(n)											
S(n)											

1. On considère la suite de nombres : $u(0) = 1$; $u(1) = 2$; $u(2) = 4$; $u(3) = 8$; $u(4) = 15$; $u(5) = 23$; $u(6) = 32$; $u(7) = 44$; $u(8) = 58$; $u(9) = 73$; $u(10) = 91$
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. La suite a(n) est la suite des différences premières $a(n) = u(n+1) - u(n)$. On a par exemple $a(0)= u(1)-u(0)= 2 - 1 = 1$ et $a(1) = u(2) - u(1) = 4 - 2 = 2$
3. La suite S(n) est la suite des différences secondes $S(n) = a(n+1) - a(n)$. On a par exemple $S(0) = a(1) - a(0) = 2 - 1 = 1$
4. Justifier que la suite u(n) est croissante et que cette croissance est en augmentation.
5. On considère maintenant la suite u(n), arithmétique de premier terme 2 et de raison 3. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. Que peut-on dire du sens de variation de la suite u(n) ?
6. On considère la suite u(n), géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

Pour s'amuser….

Le flocon de Von Koch est la courbe obtenue en poursuivant indéfiniment la construction dont les premières étapes sont dessinées ci-dessous :



Etape 1 Etape 2 Etape 3

On considère qu'à l'étape 1 le côté du triangle équilatéral mesure 1 unité.

Il s'agit, à l'aide du tableur, de trouver le **périmètre du flocon** ainsi que son **aire** à une étape quelconque n ($1 \leq n \leq 20$).

Périmètre : Un côté à l'étape n donne naissance, à l'étape n+1, à 4 côtés de longueur trois fois plus petite. Cette observation permet de compléter de proche en proche, et à l'aide de formules, les lignes d'un tableau à construire :

Convergence et divergence des suites
Soit une suite U_n que devient-elle pour n « très grand » ?

A. Expériences

- $U_n = n$ alors $U_{100}=100$; $U_{1000}=1000$ donc on dira qu 'elle tend vers l' plus infini ($+\infty$)
- $U_n = 2n + 1$ calculons les valeurs au rang 100, 1000,… pensons à la fonction affine que conclure ?

…………………………………………………………………………………………

On écrira : $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = +\infty$; la suite est dite divergente

- $Un = \frac{1}{n}$, avec $n \neq 0$, calculons les valeurs au rang 100, 1000…que conclure ?

…………………………………………………………………………………………

On écrira : $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 0$; la suite est dit convergente vers 0.

- $U_n = (-1)^n$ calculons les valeurs au rang 100, 1000,… que conclure ?

…………………………………………………………………………………………

On dit qu'uns suite est convergente vers un nombre réel L (sa limite) si plus n est « *grand* » plus U_n est « *proche* » de L sinon elle est dite divergente ($+\infty$; $-\infty$; pas de limite)

B. Que penser de ces différentes suites ?

- $\mathbf{U_n = n^2}$

…………………………………………………………………………………………

$U_n = \frac{n+1}{n}$

…………………………………………………………………………………………

- $\mathbf{U_n = \frac{n}{n+1}}$

…………………………………………………………………………………………

- $\mathbf{U_n = \frac{n^2+1}{n}}$

…………………………………………………………………………………………

Conjecture sur la convergence ou la divergence de suites à partir de ces exemples

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

C. Quelques règles à retenir :

- Les suites arithmétiques :

  pensons à la représentation graphique de la fonction affine, *f(x) = ax + b* **; c'est une droite et cela dépend de *a* (le coefficient directeur) :**

• Si $a < 0$ alors f est .... donc la suite arithmétique U_0 + nr dont la raison est négative ($r < 0$) tendra vers .... • Si $a > 0$ alors f est .... donc la suite arithmétique U_0 + nr dont la raison est positive ($r > 0$) tendra vers .... • **Elles sont donc ....** • **Et si r = 0 ?** ....

- **Les suites géométriques**

  Observons ici sur la calculatrice $f(x) = a^x$ en donnant différentes valeurs à *a*, quelles sont les valeurs de *a* qui modifient le comportement à l'infini ?

a = 2   a = 0,5   a = 1   a = -1   a = -2

....

• **Si $-1 < a < 1$ alors f tend vers .... donc la suite géométrique $U_0.q^n$ où la raison q est telle que $-1 < q < 1$ est ....** • **Si $a < -1$ ou $a > 1$ alors f tend vers .... donc la suite géométrique $U_0.q^n$ où la raison q est telle que $q < -1$ ou $q > 1$ est ....** • **Si q = 1 alors ....** • **Si q = -1 alors ....**

- **Autres suites ...**

Quelles sont vos observations sur les puissances, les fractions….

....
....
....

Exercices 14 à 17 pour aller plus loin...

Exercices sur les suites (épreuve de bac)

A - Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2002. Elle a le choix entre deux formules. Dans les deux cas, le loyer initial est 24 000 € et le locataire s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes.

1- Contrat n° 1

Le locataire accepte une augmentation de 5% du loyer de l'année précédente. Le loyer payé pendant la première année est noté u_0 = 24 000.

1.1. Calculer le loyer u_1 payé lors de la deuxième année.

1.2. Exprimer le loyer u_{n+1} (payé lors de la $(n+2)^{\text{ème}}$ année) en fonction de u_n (payé lors de la $(n+1)^{\text{ème}}$ année). En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_8

1.3. Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.

2- Contrat n° 2

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 1 500 € du loyer de l'année précédente. Le loyer payé pendant la première année est alors noté v_0 = 24 000.

2.1. Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.

2.2. Exprimer le loyer v_{n+1} (payé lors de la (n+2) ème année) en fonction de v_n (payé lors de la $(n+1)^{\text{ème}}$ année). En déduire que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

2.3. Exprimer v_n en fonction de n. Calculer v_8 .

2.4. Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.

2.5. Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

B Alice et Carole comparent leurs salaires. Elles débutent chacune avec un salaire de 1 500 €. Chaque mois, à partir du deuxième mois : Le salaire d'Alice augmente de 8 €. - Le salaire de Carole augmente de 0,2% et on y ajoute 4 €. Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n le salaire mensuel en €. Que perçoit Alice à la fin du $(n+1)^{\text{ième}}$ mois, et par c_n celui perçu par Carole. Ainsi : $a_0 = c_0 = 1500$; a_1 et c_1 représentent les salaires perçus à la fin du deuxième mois.

1) Calculer a_1 et c_1, a_2 et c_2.
2) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de a_n en fonction de n.
4) Justifier que, pour tout entier naturel n : $c_{n+1} = 1{,}002c_n + 4$.
5) On considère la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n + 2000$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002. Calculer v_0 et, pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n. En déduire que : $c_n = 3500 \text{x} 1{,}002^n - 2000$.
6) Calculer, puis comparer les salaires annuels d'Alice et Carole ont perçus au cours de leur première année de travail. Rappel : Si q est un réel différent de 1 et n un entier naturel supérieur à 2,

   $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ et $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.