Algorithmique, Arithmétique et Cryptographie

1. Quelques bases

1-a : Affecter une variable

Qu'obtient-on à l'écran lorsque l'on programme l'algorithme suivant ? (Tester l'algorithme pas à pas)

Demander A Demander B Affecter la valeur de A à B Affecter la valeur de B à A Afficher A Afficher B

1-b : Effectuer une somme

Qu'obtient-on à l'écran lorsque l'on programme les algorithmes suivants ? (Tester l'algorithme pas à pas)

Exemple 1 :

Entrée	Demander A
Traitement	Affecter la valeur de A à S Faire 10 fois la procédure suivante Affecter la valeur de S+1 à S
Sortie	Afficher S

Exemple 2 :

Donner à S la valeur 0

Début de la boucle
Demander A
Donner à S la valeur S+A
Recommencer au début de la boucle jusqu'à ce que A=0

Afficher S

1-c : La boucle SI ... ALORS

Pour un polynôme donné $P(x) = ax^2 + bx + c$, le programme suivant affiche le discriminant D et les solutions éventuelles. S'il n'y en a pas, il affiche "Pas de solutions".
Compléter l'algorithme :

Demander A
Demander ...
Demander ...
Affecter la valeur de .... à D
Afficher ...

Si D>0
Alors affiche ....
Sinon Si D=0
Alors ....
Sinon ....

2. Suites

Le programme suivant calcule les termes successifs d'une suite arithmétique, lorsqu'on entre le premier terme u_0, la raison et le nombre de termes souhaités.

2-a : Algorithme

Demander u_0
la raison r
le rang n du dernier terme.

Pour i allant de 1 à n
Affecter la valeur de $U+r$ à U
Afficher U

2-b : La boucle TANT QUE

Le programme suivant donne l'écriture en base B d'un nombre entier N écrit en base 10.
Exercice : Déterminer l'écriture de 2123 en base 5. Donner les valeurs successives du dividende N, du quotient Q et du reste R.

Etapes	N (dividende)	Q (quotient)	R (reste)
$2123 = 424\times5+3$			
$424 = 84\times5+4$			
$84 = 16\times5+4$			
$16 = 3\times5+1$			
$3 = 0\times5+3$			

Qu'est ce qui provoque l'arrêt de cette suite de divisions ? Autrement dit, quel est le ***test d'arrêt*** ?

La fonction **INT** de la calculatrice donne la partie entière d'un nombre.
A l'aide de cette fonction, comment obtient-on le quotient de la division euclidienne de N par B ?
En déduire le reste de la division.
Compléter l'algorithme :

Demander ... Demander ... Affecter la valeur de N à Q **Tant que** .... **faire** Affecter la valeur de .... à Q Affecter la valeur de .... à R Afficher .... Affecter la valeur de .... à N Fin TantQue

2-c : Tester un algorithme

Voici un algorithme de passage de la base 10 à la base B :

```
DEBUT
    Nombre → N
    Base → B
    0 → I
    0 → A
        TANT QUE N > 0
                A+RESTE(N/B)×10^I → A
                QUOTIENT de la division de N par B → N
                I+1 → I
        FIN TANT QUE
    AFFICHER (A)
FIN
```

<u>Questions</u> :

1. Tester cet algorithme pour N =111 et B=5 (Écrire toutes les étapes).
2. Précisez ce que l'utilisateur obtient sur l'écran de la calculatrice pour un nombre N.
3. Cet algorithme fonctionne-t-il pour une base supérieure ou égale à 10 ? Justifier.

2-d : Programmation sur tableur

Vous pourrez utiliser la fonction MOD : « =MOD(nombre ; diviseur) » renvoie le reste d'une division.

Voici une feuille de calcul sur tableur :

	A	B	C
1	a	b	reste
2	4998	4746	252
3	4746	252	210
4	252	210	42
5	210	42	0
6	42	0	#DIV/0!
7	0	#DIV/0!	#DIV/0!
8	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!

1. Que permet-elle de calculer ?

2. Quelle formule a été écrite en A3, B3 et C2 ?

3. Comment obtient-on les résultats dans les plages de cellules (A4 : A8) et (C3 : C8) ?

Expliquez le message d'erreur qui apparaît dans cette feuille.

3. Hörner

Remarque : Soit $P(x)$ un polynôme de degré n. $P(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = a_0 + x\left(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots\right) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x\left(a_3 + \ldots\right)\right)\right)$$

On peut utiliser cette forme pour calculer l'image d'un réel x_0 par P. C'est la méthode de Hörner.

Algorithme :

Demander	le degré n du polynôme
	la valeur de x_0
	les coefficients du polynôme.
Affecter la valeur de a_n à A	
Pour i allant de n à 1 affecter la valeur de $Ax+a_{i-1}$ à A	
Afficher A	

Questions :

1. Tester cet algorithme avec $P(x) = 2 - 4x + 3x^2 + 2x^3 - 0,5x^4$ et $x_0 = 7$.

2. Écrire ce polynôme sous la forme présentée en introduction puis déterminer le nombre d'opérations effectuées (additions et multiplications) pour calculer P(7).

3. Compter le nombre d'opérations effectuées pour le calcul suivant :

$$P(7) = 2 - 4\times7 + 3\times7^2 + 2\times7^3 - 0,5\times7^4 .$$

4. Écrire l'algorithme qui permet de calculer l'image de x_0 comme dans le calcul précédent.

TI	**CASIO**
prompt N,X	"N" : ? $\rightarrow$ N "X" : ? $\rightarrow$ X
clrlist L_1	
	N+1 $\rightarrow$ Dim List1
Disp "$\{a_0 ; a_1 ; a_2 ; \ldots\}$" input L_1	for 1 $\rightarrow$ I to N+1 "coef ?" : ? $\rightarrow$ List[1] next
$L_1(1) \rightarrow$ A	List1[1] $\rightarrow$ A
for (I, 2,N+1) $L_1(I)\times X^{I-1} + A \rightarrow A$ end	for 2 $\rightarrow$ I to N+1 $\text{List}1[I]\times X^{I-1} + A \rightarrow A$ Next
Disp A	A

Pour **comparer les vitesses d'exécution** des deux programmes précédents (calcul de l'image d'un nombre par un polynôme) sur les calculatrices **TI**, , on pourra les faire tourner avec le polynôme de degré 100 et dont tous les coefficients sont 10 :

seq(10,K,1,101,1)

(Avec X=2 ; 4 secondes avec Hörner et 7 secondes avec l'autre !)

Pour information : Pour un polynôme de degré n :

Le nombre d'opérations avec l'écriture $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ est de l'ordre de $\frac{n^2}{2}$, plus précisément $\frac{n^2}{2} + \frac{3}{2} n$.

Le nombre d'opérations avec l'écriture $a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \ldots (a_{n-1} + x a_n) \ldots)$ est de l'ordre de $2n$.

4. Dichotomie

Le programme suivant donne un encadrement d'amplitude choisie d'une solution de l'équation $f(x)=0$.
Il nécessite de connaître un intervalle où se situe la solution.
Algorithme :

Demander	l'amplitude E
	les bornes de l'intervalles : A et B
	la fonction *f*.
Tant que l'amplitude de l'intervalle [A;B] est supérieure à E :	
Déterminer le centre de l'intervalle [A;B]	
Affecter cette valeur à C.	
Regarder si la solution se situe dans l'intervalle [A ; C] ou [C ; B]	
Recommencer avec l'intervalle où se situe la solution.	
Afficher A et B.	

Questions :

1. Tester cet algorithme pas à pas avec $E = 0{,}1$; $I = [0;2]$; $f(x) = 2x - 3$. Quelles sont les valeurs de A et B affichées ?

2. $A = 1{,}4375$ et $B = 1{,}5$.

a. Donner une valeur approchée par excès à 10^{-1} de la solution.

b. Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} de la solution.

c. Peut-on donner une valeur arrondie à 10^{-1} de la solution avec ces valeurs de A et B ? Justifier.

d. Quelle amplitude faut-il prendre pour avoir une valeur arrondie à 10^{-1} de la solution ?

3. La solution de l'équation $f(x) = 0$ est $\frac{3}{2}$. Quelle instruction peut-on ajouter à la fin du programme pour qu'il ne donne que A (ou que B) lorsque c'est la solution exacte ?

5. Arithmétique

5-a : Recherche des entiers n divisant $2^n + 1$

Algorithme

```
    Demander n
        Pour i allant de 1 à n
                Si n divise 2^n + 1
                alors afficher n
                Fin du Si
        Fin du Pour
```

Cet algorithme est séduisant et simple mais ....sur une machine classique, la division de $2^n + 1$ par n pose des problèmes dès que n dépasse 50 (au passage, une première analyse aurait permis de faire remarquer que les seules solutions possibles sont des nombres impairs). Il s'agit donc de savoir comment exprimer le fait que n divise $2^n + 1$.

http://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/irem/ndivise2n+1.pdf

5-b : Problème du Spaghetti

Je dispose d'un spaghetti. Quelle est la probabilité qu'en le coupant en trois je puisse former avec les trois bouts obtenus un triangle ?

Algorithme
Initialisation des variables R (nombre de succès)
Demander le nombre d'essais N
    Pour I allant de 1 à N
        Essai I
        Couper le premier morceau de longueur X
        Couper le second morceau de longueur Y
        Calculer la longueur du troisième morceau Z
            Si le maximum de ces trois longueurs est inférieur ou égal à 0,5
            Alors Augmenter R de 1
            Fin du Si
    Fin du Pour
Afficher R/N

Il reste à savoir ce que signifie couper un spaghetti en trois. On peut en effet, le couper en deux puis couper le morceau le plus long en deux. Mais est-ce la seule solution ? Il serait donc intéressant de chercher différents modèles et faire compléter l'algorithme précédent.

5-c : Un critère original de recherche de nombres premiers

(Critère de Sundaram)

On considère le tableau suivant :

4	7	10	13	16	19	22
7	12	17	22	27	32	37
10	17	24	31	38	...	
13	22	31	40	.....		
16	27	38	.....			
19	32	45	.....			
22	37	.....				

On montre que si N est dans ce tableau 2N+1 est composé et que si N n'y est pas 2N + 1 est premier. Comment bâtir à partir de ce tableau la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier A donné ?

Vous trouverez tous les renseignements dans les deux textes suivants sur les nombres premiers :
http://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/irem/nbpremier_partie1.pdf
http://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/irem/nbpremier_partie2.pdf

Dans le même type de registre, quelques programmes et idées :
http://ww3.ac-poitiers.fr/math/prof/objets/index.htm

6. Suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 \text{ si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite pour $u_0 = 1$; $u_0 = 3$ et $u_0 = 7$.

On ne sait pas à l'heure actuelle s'il existe un entier u_0 pour lequel cette suite n'atteint jamais 1.

2. Ecrire un programme demandant u_0 et n à l'utilisateur et affichant toutes les valeurs u_1 ; u_2 ; ... ; u_n.

3. Ecrire un programme demandant u_0 *à* l'utilisateur et affichant toutes les valeurs $u_1; u_2, \ldots u_N$ où N est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 1$.

4. Modifier votre programme pour qu'il affiche en plus N et le plus grand élément de la séquence (u_0, ...,u_N)

Réponses :

1. Pour $u_0 = 1$: $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$ u_0=*1*, u_1=*4*, u_2=*2*, u_3=*1* ...

2.

Demander u_0
Demander n
Affecter la valeur de u_0 à U
    Pour i allant de 1 à N
        Si U est pair Affecter la valeur de U/2 à U
        Sinon Affecter la valeur de 3U+1 à U
        Fin Si
    Afficher U
    Fin de la boucle
Afficher U

3.

Demander u_0
Affecter la valeur de u_0 à U
    Tant que $U \neq 1$
        Si U est pair Affecter la valeur de U/2 à U
        Sinon Affecter la valeur de 3U+1 à U
        Fin Si
    Afficher U
    Fin Tant que

4.

Demander u_0
Affecter la valeur de u_0 à U
Affecter la valeur 0 à N
Affecter la valeur de U à V
  Tant que $U \neq 1$
    Affecter la valeur de N+1 à N
        Si U est pair Affecter la valeur de U/2 à U
        Sinon Affecter la valeur de 3U+1 à U
        Fin Si
        Afficher U
        Si U>V Affecter la valeur de U à V
  Fin Tant que
Afficher V
Afficher N

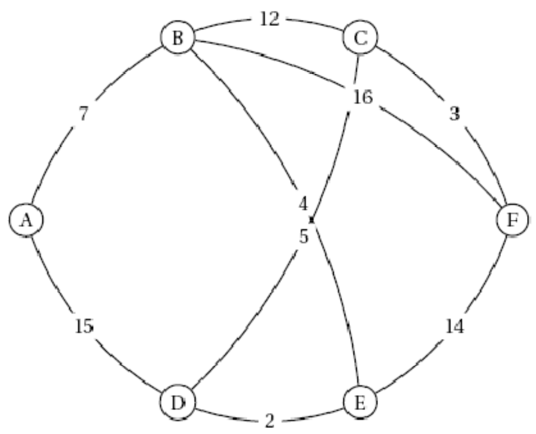
7. Exercices Baccalauréat ES spécialité mathématiques

7-a : Agence de voyages

Baccalauréat ES spécialité - Pondicherry avril 2009

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.

Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1. Justifier que ce graphe est connexe.

2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.

a. En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.

b. En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.

3. Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.

Si ce parcours existe, le décrire sans justifier ; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

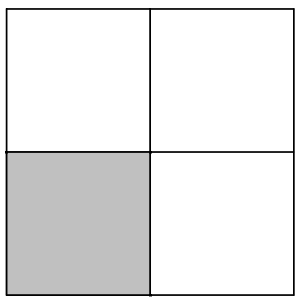
8. Exercices Baccalauréat L spécialité mathématiques

8-a : Fractale

Baccalauréat L spécialité – France juin 2009

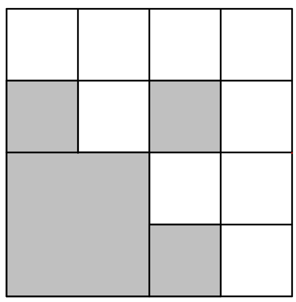
On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage : on partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage : on partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-contre.

On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.



Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi $A_1 = 1$.

La surface coloriée sur la figure à la 2$^{\text{ème}}$ étape du coloriage a donc pour aire A_2.

Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Calculer A_2 puis montrer que $A_3 = \dfrac{37}{16}$.

2. On considère l'algorithme suivant :

> Entrée : P un entier naturel non nul.
> Initialisation : N = 1 ; U = 1.
> Traitement : Tant que N $\leq$ P :
>   Afficher U
>   Affecter à N la valeur N +1
>   Affecter à U la valeur $\dfrac{5}{4} \times \mathrm{U} + \dfrac{1}{2}$

a. Faire fonctionner cet algorithme avec P = 3.

b. Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n.

Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur à 1 tel que $U_n = A_n$.

Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = A_n$.

Partie B

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \dfrac{3}{4} A_n + 1$.

1. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = A_n - 4$.

a. Calculer B_1.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \dfrac{3}{4} B_n$.

c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?

d. Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.

2. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier la réponse. Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.

8-b : Divisibilité par 13

Baccalauréat L spécialité – Polynésie juin 2009

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $A(n) = 5^n - 1$.

Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité de $A(n)$ par 13.

1. Calculer $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$. Sont-ils divisibles par 13 ?

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée : Saisir un nombre entier naturel non nul N.
Initialisation : Affecter à m la valeur N.
Traitement : Tant que m >6 affecter à m la valeur $m - 13$.
Sortie : Afficher n.

a. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 25$ puis $N = 125$.

b. Qu'obtiendrait-on en sortie si on faisait fonctionner cet algorithme avec $N = 54$?

3. a. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel k :

$54k \equiv 1$ modulo 13
$54k+1 \equiv 5$ modulo 13
$54k+2 \equiv -1$ modulo 13
$54k+3 \equiv -5$ modulo 13

b. Application : Quel est le reste dans la division euclidienne de $5^{2009} - 1$ par 13 ?

c. Pour quelles valeurs de l'entier n, l'entier $A(n)$ est-il divisible par 13 ?

8-c : Suites et logique

Baccalauréat L spécialité – Am. du Nord juin 2009

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

> *Entrée* : n est un entier naturel non nul
> *Initialisation* : Donner à A et B la valeur 1 et à K la valeur 0
> *Traitement* : Tant que $K < n$, réitérer la procédure suivante
> donner à A la valeur $4A$
> donner à B la valeur $B + 4$
> donner à K la valeur $K + 1$
> *Sortie* : Afficher A et B

1. Justifier que, pour $n = 2$, l'affichage obtenu est 16 pour A et 9 pour B.

Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

Valeur de n	1	2	3	4
Affichage pour A		16		
Affichage pour B		9		

2. Pour un entier naturel non nul quelconque n,l'algorithme affiche en sortie les valeurs des termes de rang n d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique. Donner le premier terme et la raison de chacune de ces suites.

Partie B

Voici quatre propositions :

P_1 : « Pour tout n entier naturel, $4^n > 4n + 1$ »

P_2 : « Pour tout n entier naturel, $4^n \leq 4n + 1$ »

P_3 : « Il existe au moins un entier naturel n tel que $4^n \leq 4n + 1$ »

P_4 : « Il existe un unique entier naturel n tel que $4^n \leq 4n + 1$ »

1. Pour chacune d'elles, dire sans justification si elle est vraie ou fausse.

2. L'une des trois dernières est la négation de la propriété P_1. Laquelle ?

Partie C

1. Soit p un entier naturel non nul.

a. Développer et réduire $4(p + 1) + 1 - 4(4p + 1)$.

b. En déduire l'inégalité $4(4p + 1) > 4(p + 1) + 1$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, a-t-on l'inégalité $4^n > 4n + 1$?

8-d : Suite arithmétique

Baccalauréat L spécialité - Liban juin 2009

On considère l'algorithme suivant :

> *Entrée* : N est un entier naturel
> *Initialisation* :
> Donner à P la valeur 0
> Donner à U la valeur 4
> Donner à S la valeur 4
> *Traitement* : Tant que $P < N$
> Donner à P la valeur $P + 1$
> Donner à U la valeur $4 + 2P$
> Donner à S la valeur $S + U$
> *Sortie* : Afficher S

1. Faire fonctionner l'algorithme pour $N = 5$.

On fera apparaître les différentes étapes du déroulement de l'algorithme dans un tableau comme ci-dessous à reproduire sur la copie.

	Valeur de P	Valeur de U	Valeur de S
Initialisation	0	4	4
Étape 1	1	6	10
Étape 2	2		
. . .			
. . .			
Affichage			

2. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = U_n + 2$ et $U_0 = 4$.

a. Calculer U_1, U_2 et U_3.

b. Soit p un nombre entier naturel. Donner, en fonction de p, la valeur de U_p. Calculer U_{21}.

3. On fait fonctionner l'algorithme pour $N = 20$, la valeur affichée par S est alors 504.

Quelle est la valeur affichée par S si on fait fonctionner l'algorithme pour $N = 21$?

4. On fait fonctionner l'algorithme pour un entier naturel N quelconque. Exprimer la valeur affichée S à l'aide des termes de la suite (U_n).

8-e : Congruences modulo 7

Baccalauréat L spécialité - France–La Réunion septembre 2008

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^3 par 7.

b. 2^3 et 2^6 sont-ils congrus modulo 7 ? Justifier la réponse.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1$ (modulo 7).Que peut-on en déduire pour le reste de la division euclidienne de 2^{2007} par 7 ?

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée : n est un entier naturel.

Initialisation : Donner à u la valeur initiale n.

Traitement : Tant que $u > 7$, affecter à u la valeur $u - 7$.

Sortie : Afficher u.

a. Faire fonctionner cet algorithme avec $n = 25$.

b. Proposer deux entiers naturels différents qui donnent le nombre 5 en sortie.

c. Peut-on obtenir le nombre 11 en sortie ? Justifier.

d. Qu'obtient-on en sortie si on fait fonctionner cet algorithme avec le nombre 2^{2007} ? Même question avec le nombre 2^{2008}. Justifier.

e. On a fait fonctionner cet algorithme avec un nombre a et on a obtenu en sortie le nombre 3.

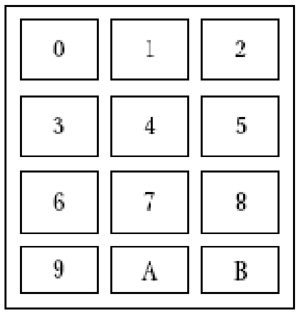
On a fait fonctionner cet algorithme avec un nombre b et on a obtenu en sortie le nombre 5.

Si on fait fonctionner cet algorithme avec le nombre $3 \times a + b$, qu'obtiendra-t-on en sortie ? Justifier.

8-f : Digicode

Baccalauréat L spécialité - France–La Réunion septembre 2007

Une entreprise de recyclage récupère un lot de digicodes ayant tous un clavier identique à celui représenté ci-contre.



Chacun de ces digicodes a été programmé pour fonctionner avec **un code** constitué de deux signes choisis parmi les douze figurant sur ce clavier.

Par exemple A0, BB, 43 sont des codes possibles.

Pour remettre en état de fonctionnement un tel digicode, il faut retrouver **son code**.

Pour faciliter une telle recherche, a été inscrit sur le boîtier de chaque digicode un nombre R qui dépend du code. Ce nombre a été obtenu de la manière suivante :

• Le code est considéré comme un nombre écrit en base 12. $\mathbb{A}$ est le chiffre dix et $\mathbb{B}$ le chiffre 11.

• Le nombre R inscrit sur le boîtier est le reste de la division euclidienne du code, converti en base 10, par 53. R est donc un nombre écrit en base 10 et tel que $0 \leq R < 53$.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. On suppose que le code d'un digicode est $\mathbb{AB}$.

a. Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 est $(\mathbb{AB})_{\text{douze}}$.

b. Déterminer le nombre R inscrit sur le boîtier de ce digicode.

3. Sur le boîtier d'un digicode est inscrit le nombre R égal à 25. Démontrer que $(21)_{\text{douze}}$ peut être le code de ce digicode.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée : R un entier naturel.

Initialisation : L liste vide ; $n = 0$.

Traitement : Tant que $53n + R \leq 143$, mettre dans la liste L la valeur de $53n$ + R puis ajouter 1 à n.

Sortie : Afficher la liste L.

a. Faire fonctionner cet algorithme pour $R = 25$.

b. On suppose que le nombre R inscrit sur le boîtier d'un digicode est 25. Quels sont les trois codes possibles de ce digicode ?

5. Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Si l'affirmation est considérée comme fausse, en apporter la preuve.

Affirmation : quelle que soit la valeur de R l'algorithme permet de trouver trois codes parmi lesquels se trouve le code secret.

8-g : A la photocopieuse

Baccalauréat L spécialité - France–La Réunion - juin 2008

Dans un lycée, un code d'accès à la photocopieuse est attribué à chaque professeur.

Ce code est un nombre à quatre chiffres choisis dans la liste {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, chaque chiffre pouvant être répété à l'intérieur d'un même code. Par exemple 0027 et 5855 sont des codes possibles.

1. Combien de codes peut-on ainsi former ?

2. Ce code permet aussi de définir un identifiant pour l'accès au réseau informatique. L'identifiant est constitué du code à quatre chiffres suivi d'une clé calculée à l'aide de l'algorithme suivant :

Entrée : N est le code à quatre chiffres.

Initialisation : Affecter à P la valeur de N ;
Affecter à S la valeur 0 ;
Affecter à K la valeur 1.

Traitement : Tant que $K \leq 4$:
Affecter à U le chiffre des unités de P ;
Affecter à K la valeur $K + 1$;
Affecter à S la valeur $S + K \times U$;
Affecter à P la valeur $\dfrac{P - U}{10}$;
Affecter à R le reste dans la division euclidienne de S par 7 ;
Affecter à C la valeur $7 - R$.

Sortie « la clé » : Afficher C.

a. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 2282$ et vérifier que la clé qui lui correspond est 3. On prendra soin de faire apparaître les différentes étapes du déroulement de l'algorithme (on pourra par exemple faire un tableau.).

b. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Un professeur s'identifie sur le réseau informatique en entrant le code 4732 suivi de la clé 7.

L'accès au réseau lui est refusé. Le professeur est sûr des trois derniers chiffres du code et de la clé, l'erreur porte donc sur le premier chiffre du code (qui n'est pas égal à 4). Quel est ce premier chiffre ?

8-h : Algorithme

d'après Bac L spécialité France juin 2007

On considère l'algorithme suivant :

Entrée : a un entier naturel.

Initialisation : L liste vide
Affecter la valeur a à x.

Traitement : Tant que $x > 0$;
Effectuer la division euclidienne de x par 7 ;
Affecter son reste à r et son quotient à q ;
Mettre la valeur de r au début de la liste L ;
Affecter q à x.

Sortie : Afficher les élements de la liste L.

Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 486$. On complètera le tableau ci-dessous :

	r	q	L	x
Initialisation			vide	486
Fin étape 1				
Fin étape 2				
. . .				
. . .				
. . .				

8-i : Vingt euros

On admet qu'on obtient le même reste en divisant un nombre par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.

Par exemple :

$8\,753 = 972\times9+5$, le reste est donc 5.

$8+7+5+3 = 23 = 2\times9+5$, le reste est également 5.

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre.

On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres.

On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8. Exemple :

Code : s00212913862.
Rang dans l'alphabet de la lettre s ; 19.
Nombre obtenu : 1900212913862.
Reste pour ce billet : 8

1. Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.

a. Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.

b. Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.

c. Que peut-on dire de ce billet ?

2. Sur un billet authentique figure le code s0216644810x, x pour le dernier chiffre, illisible. Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9. En déduire x.

3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.

a. Déterminer les valeurs possibles de n.

b. Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?

8-j : Time is money

Baccalauréat L - Nouvelle-Calédonie - novembre 2005

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décembre 2004 à minuit.

1. a. À quelle heure est émis le dernier bip du 1er janvier 2005 ?

b. À quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005 ?

c. À quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005 ?

d. À quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005 ?

Expliquer les réponses.

2. a. Montrer que : $24 \equiv 3 (\text{modulo} 7)$.

b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les réponses. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n\times 24$ par 7										

c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tous les 7 jours seulement.

3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte donc 365 jours.

a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $365 \equiv a (\text{modulo} 7)$.

b. À quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005 ?

8-k : ISBN

Baccalauréat L spécialité - Nouvelle-Calédonie - novembre 2004

Tous les ouvrages publiés sont identifiés par un numéro ISBN (International Standard Book Number) qui indique la langue de publication, l'éditeur et la référence de l'ouvrage chez cet éditeur.

Un numéro ISBN est constitué de neuf chiffres (c'est-à-dire neuf entiers compris entre 0 et 9) suivis d'un espace et d'une clé. Cette clé est un chiffre ou la lettre X (le 10 en numération romaine).

Pour déterminer la clé d'un numéro ISBN dont les neuf premiers chiffres sont *abcdefghi*, on calcule le nombre $N = a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + 8h + 9i$, puis on détermine le nombre r compris entre 0 et 10 qui est congru à N modulo 11.

Si le nombre r est strictement inférieur à 10, la clé est égale à r ; si le nombre r est égal à 10, la clé est X.

1. Vérifier que la clé du numéro ISBN **190190340 0** est correcte.

2. Calculer la clé du numéro ISBN dont les 9 premiers chiffres sont : **103241052**.

3. Le quatrième chiffre du numéro ISBN d'un ouvrage est illisible. On le note d.

La clé de ce numéro est 4 et le numéro se présente ainsi : **329*d*12560 4**.

a. Montrer que : $4d \equiv 2$ (modulo 11).

b. En déduire le chiffre d.

4. Le premier chiffre et le neuvième chiffre du numéro ISBN d'un autre ouvrage sont illisibles. On les note a et i. La clé de ce numéro est 9 et le numéro se présente ainsi : ***a*32100501*i***.

a. Montrer que $a \equiv 2-9i$ (modulo 11).

b. Donner deux valeurs possibles du couple (a ; i).

8-l : Année bissextile

Baccalauréat L spécialité - Amérique du Sud - novembre 2004

Une année bissextile compte 366 jours et une année non bissextile 365 jours. Une année est bissextile si son « numéro » est divisible par 4 sauf s'il s'agit d'un siècle.

Les siècles, années dont le « numéro » se termine par deux zéros, ne sont, en général, pas bissextiles sauf si leur « numéro » est divisible par 400.

Quelque exemples : 1996 était bissextile, 1997ne l'était pas, 1900 non plus mais 2400 le sera.

1. Trouver les deux entiers naturels a et b inférieurs ou égaux à 6 tels que :

$$365 \equiv a \text{ (modulo 7) et } 366 \equiv b \text{ (modulo 7)}.$$

2. a. En supposant que le premier janvier d'une année non bissextile soit un lundi, expliquer pourquoi le premier janvier de l'année suivante sera un mardi.

b. Si le premier janvier d'une année bissextile est un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier de l'année suivante ?

3. Une période de quatre années consécutives compte $N = 3\times365+1\times366$ jours.

Sans calculer N, justifier que $N \equiv 5$ (modulo 7).

4. En supposant que le premier janvier d'une année soit un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier quatre ans plus tard ? Expliquer la réponse.

Plus généralement, pour une date donnée, (par exemple le 1er janvier),chaque période de 4 années produit un décalage de cinq jours dans le cycle des jours de la semaine.

5. Compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de périodes de 4 années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3		
4		
5		
6		
7		

6. a. Expliquer pourquoi l'année 2004 est bissextile.

b. Sachant que le 29 février 2004 était un dimanche, quel jour de la semaine sera le 29 février 2008 ?

Quel jour de la semaine sera le 29 février 2012 ? Expliquer les réponses.

c. Quelle sera la prochaine année où le 29 février sera un dimanche ? Expliquer la réponse.

8-m : Codage affine

Baccalauréat L spécialité Pondicherry avril 2005

Sophie et Marc s'envoient régulièrement des messages qu'ils codent afin de ne pas en révéler la teneur à n'importe qui. Sophie utilise le procédé suivant :

• Tout d'abord, à chaque lettre de l'alphabet, elle associe son rang dans l'alphabet (ainsi 1 est associé à A, 2 à B, etc.). À chaque lettre, elle associe donc un nombre entier x.

• Elle associe ensuite à x un nouveau nombre entier y, en posant : $y \equiv 3x + 5$ (modulo 26) avec $0 \leq y \leq 25$.

• Elle envoie enfin le message crypté sous forme d'une suite de lettres en associant de nouveau au nombre y la lettre qui lui correspond dans l'alphabet (à zéro elle associera la lettre Z, à 1 la lettre A, à 2 la lettre B, etc. et à 25 la lettre Y).

1. Vérifier qu'avec laméthode de Sophie :

a. le nombre y associé à la lettre E est 20,

b. la lettre P est codée par la lettre A.

2. Compléter le tableau suivant.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
rang x dans l'alphabet	1	2	3	4	5								
nombre y associé					20								
lettre envoyée													

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang x dans l'alphabet													
nombre y associé													
lettre envoyée			A										

3. Décrypter ensuite à l'aide de cette méthode le message :

S F S T O T J R H M C T R H M F D P T J.

8-n : Palindrome

D'après TL spé maths, banque d'exercices 2006

On dit qu'un nombre est un palindrome dans un système de numération s'il peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche en gardant la même valeur. Par exemple, 34543 est un palindrome dans le système de numération décimale.

1. Le nombre 3773 est un palindrome. Quelle est son écriture en base cinq ? Est-ce un palindrome en base cinq ?

2. a. Le nombre $(2002)_{\text{cinq}}$ est un palindrome en base cinq. Est-ce un palindrome dans le système de numération décimale ?

b. Tous les nombres de quatre chiffres qui sont des palindromes en base cinq sont-ils des palindromes dans le système de numération décimale ?

3. On considère un nombre de quatre chiffres qui est un palindrome dans le système de numération décimale. Il s'écrit *abba*. Etudier la divisibilité par 11 de ce nombre.

4. Ecrire un algorithme permettant de détecter si un nombre de 3 chiffres est un palindrome. Même question avec un nombre de 4 chiffres.

8-o : Algorithme 1

D'après TL spé maths, banque d'exercices 2006

Soit N un entier naturel non nul.

On considère l'algorithme suivant :

1. Initialiser en donnant à A et à I la valeur de N.
2. Tant que $I > 2$, réitérer la procédure suivante :
   Donner à I la valeur $I - 1$
   Donner à A la valeur $A \times I$
3. Donner à A la valeur $A - 1$.
4. Afficher A.

1. Pour tout entier naturel N on note A_N le nombre affiché à l'étape 4 de cet algorithme.

a. Calculer A_1, A_2, A_3 et A_4.

b. Vérifier que $A_5 = 119$.

c. Calculer A_{10}.

2. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse donnée :

a. « A_N est un nombre premier pour certaines valeurs de N. »

b. « A_N est un nombre premier pour n'importe quelle valeur de N. »

c. « Quel que soit l'entier naturel non nul N, si N est premier, alors A_N est premier. »

d. « Il existe A_N premier tel que N n'est pas premier. »

3. Etudier la parité des nombres A_N.

8-p : Algorithme 2

D'après TL spé maths, banque d'exercices 2006

1. On considère l'algorithme n°1 suivant :

Entrée :	n un entier naturel
Initialisation :	donner à u la valeur initiale n
Traitement :	tant que $u > 11$ affecter à u la valeur u − 11
Sortie :	afficher u

a. Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 35$ puis pour $n = 55$.

b. Soit un entier naturel n quelconque. En imaginant que l'on fasse fonctionner cet algorithme avec n, quel lien existe-t-il entre n et le nombre entier naturel u obtenu en sortie ?

2. On considère l'algorithme n°2 suivant :

Entrée : a un élément de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, b un élément de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Traitement : affecter à u la valeur $a + 10b$

affecter à v la valeur $b + 10a$

affecter à m la valeur $v + 100u$

Sortie : afficher m

a. Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 1$ et $b = 2$, $a = 2$ et $b = 1$.

b. Ecrire en base 10 le nombre m donné en sortie par cet algorithme pour deux nombres a et b quelconques mis en entrée dans cet ordre.

3. A partir de deux nombres a et b quelconques, éléments de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, l'algorithme n°2 donne en sortie un nombre m. On donne ce nombre m comme entrée à l'algorithme n°1. En écrivant m en fonction de a et de b, expliquer pourquoi on obtient toujours 0 comme résultat.

8-q : Algorithme 3

D'après TL spé maths, banque d'exercices 2006

On considère l'algorithme suivant :

Entrée : X entier naturel, Y entier naturel non nul tel que $X < Y$, n entier naturel

Initialisation : L liste vide ;

Donner à x et à r la valeur de X, donner à y la valeur de Y ;

Traitement : Pour i=1 jusqu'à n

Donner à x la valeur de $10 \times r$

Calculer le quotient entier de x par y et l'affecter à q

Calculer le reste de la division euclidienne de x par y et l'affecter à r

Ajouter le contenu de q à la liste L

Sortie : Afficher L.

1. a. Qu'obtient-on dans la liste L lorsque l'on fait fonctionner cet algorithme avec en entrées $X = 2$, $Y = 11$ et $n = 6$?

b. Interpréter le contenu de la liste L relativement au quotient $\dfrac{X}{Y}$.

2. On s'intéresse dans cette question au cas où $X = 5$ et $Y = 14$.

On souhaite programmer cet algorithme avec un tableur afin d'obtenir des résultats analogues aux suivants :

	A	B	C	D	E
1					
2	**n**	**x**	**y**	**q**	**r**
3		5	14		5
4	1	50	14	3	8
5	2	80	14	5	10
6	3	100	14	7	2
7	4	20	14	1	6
8	5	60	14	4	4
9	6	40	14	2	12
10	7	120	14	8	8
11	8	80	14	5	10
12	9	100	14	7	2
13	10	20	14	1	6
14	11	60	14	4	4
15	12	40	14	2	12

La valeur de X a été saisie en cellule B3 et celle de Y en cellule C3.

a. Dans quelle plage de cellules retrouve-t-on le contenu de la liste L ?

b. Quelles formules saisir en cellule D3 et E3 si l'on souhaite pouvoir les recopier respectivement dans les plages de cellules « D4:D15 » et « E4:E15 » ?

c. Quelle formule saisir en cellule B4 ?

d. Si l'on recopie dans la plage de cellules « A16:E16 » les formules saisies dans la plage de cellules « A15:E15 », quels contenus va-t-on obtenir ?

e. A quelle valeur de n suffit-il de s'arrêter pour être en mesure de prévoir la suite de tous les contenus des colonnes B, D et E ? Pourquoi ?

3. On a programmé sur tableur l'algorithme donné en début d'exercice et obtenu le résultat suivant. Malheureusement lors de la capture d'écran les contenus de certaines cellules ont été effacés. Il manque en particulier des valeurs de X et Y.

	A	B	C	D	E
1					
2	n	x	y	q	r
3					23
4	1	230		2	32
5	2	320		3	23
6	3	230		2	32
7	4	320		3	23

a. Quelle écriture décimale illimitée du quotient $\frac{X}{Y}$ peut-on donner grâce aux informations données par cette capture ?

b. Retrouver X et Y.

Remarque : les fonctions utilisées peuvent être :

– la fonction partie entière notée ENT (=ENT(x)), qui, à tout nombre réel x associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$;

– la fonction MOD : « =MOD(nombre, diviseur) » qui donne le reste de la division euclidienne du nombre par le diviseur.

9. Références

Un cours assez complet :

http://www.ac-nancy-metz.fr/eco-gestion/eric_crepin/algo/exercices/presentation.htm

Une introduction claire

http://dept-info.labri.fr/ENSEIGNEMENT/INITINFO/initinfo/support.html

Le cycle terminal en série L (document d'accompagnement)

http://www.cndp.fr/archivage/valid/73366/73366-12310-16932.pdf

http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Term/Docs/TerminaleLSpecialite/index.htm

http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Term/Docs/TerminaleLSpecialite/Algo.htm

Banque d'exercices TL

http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Term/Docs/TerminaleLSpecialite/L2006.pdf