

## Théorèmes de comparaisons

$a$  est un nombre réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$

SI	ET SI	ALORS
$f(x) \geq u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
$f(x) \leq u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
$ f(x) - \ell  \leq u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \ell$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ c'est le théorème des « gendarmes »
$f(x) \leq g(x)$	$f$ et $g$ admettent des limites en $a$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

## Limite d'une fonction composée

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$ .

Il existe une présentation plus intuitive de ce théorème :

Il s'agit de calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ . Posons  $X = \frac{3}{x}$ . Alors :

« Dire que  $x$  tend vers  $+\infty$  équivaut à dire que  $X$  tend vers  $0^+$  ».

C'est à dire :  $\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{3}{x} \\ \text{et } x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{X} \\ \text{et } X \rightarrow 0^+ \end{array} \right\}$

D'où :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{3}{X} \sin(X) = 3 \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin(X)}{X} = 3$

4

## Croissances comparées

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
Pour tout réel $\alpha > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

## Comment utiliser les fonctions de références ?

Les résultats précédents s'utilisent « sans justification » par simple « référence » au cours. Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

puisque pour  $(n > 0)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  (fonction de référence)

2

## Fonctions de référence

$n$  désigne un entier naturel strictement positif

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
pour $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$	pour $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$

## Comportements à l'origine

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
pour $\alpha > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$	pour $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$

1

## Opérations sur les limites

SOMME f+g	$\lim f$ $\lim g$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$
	$\ell'$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<b>FI</b>	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	<b>FI</b>	$+\infty$	$-\infty$

PRODUIT f.g	$\lim f$ $\lim g$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$sg(\ell')\infty$	$sg(-\ell')\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$sg(\ell)\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$sg(-\ell)\infty$	$-\infty$	$+\infty$

QUOTIENT f/g	$\lim f$ $\lim g$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$
	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$sg(\ell')\infty$	$sg(-\ell')\infty$
$+\infty$	$0$	<b>FI</b>	<b>FI</b>	<b>FI</b>
$-\infty$	$0$	<b>FI</b>	<b>FI</b>	<b>FI</b>

« FI » signifie : « Forme Indéterminée ». Il s'agit de situations où les théorèmes **ne permettent pas** de conclure.

Les situations : «  $\infty - \infty$  » «  $0 \times \infty$  » «  $\frac{\infty}{\infty}$  » «  $\frac{0}{0}$  »

correspondent à des formes indéterminées.

3