Valeurs absolues - Encadrements

Définition et propriétés

Définition : Soit x un réel, on appelle valeur absolue de x notée $|x|$ le nombre positif défini par :
$|x| = x$ si $x>0$ ou $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Propriétés : $|-x|=|x|$; $\sqrt{(x^2)} = |x|$; $|xy|=|x|\times|y|$; $|x/y|=|x|/|y|$ si $y \neq 0$

Inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x|+|y|$

Propriétés : Soit $a>0$ et x réel, alors:

$|x|=a \Longleftrightarrow x=a$ ou $x=-a$; $|x| \leq a \Longleftrightarrow S = [-a; a]$; $|x|>a \Longleftrightarrow S =]-\infty;-a[\, U \,]a;+\infty[$

II] Encadrements

Définition : Réaliser l'encadrement d'un nombre x quelconque, c'est trouver 2 nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$. **L'amplitude de l'encadrement est c = b - a**

Valeur Approchée : Soit a, x 2 nombres et $e>0$. Alors a est une valeur approchée de x (ou approximation) à e près (ou à la précision e près) quand $|x-a| \leq e$

Définition : Soit a, x réels et $e>0$,

- a est une valeur approchée de x à e près **par défaut** si $a \leq x \leq a+e$
- a est une valeur approchée de x à e près **par excès** si $a-e \leq x \leq a$

Propriétés :

- Soit x tel que $a \leq x \leq b$, une valeur approchée de x est $c=(a+b)/2$. La précision est $e=(b-a)/2$ et c est une valeur approchée de x à e près soit : $|x-c| \leq e$.
- Si x tel que $a \leq x \leq b$ et que $c \leq a \leq b \leq d$ alors on a : $c \leq a \leq x \leq b \leq d$
- Si x tel que $a \leq x \leq b$, un majorant de $|x|$ est le plus grand nombre en valeur absolue $|a|$ou $|b|$.

III] Rappels sur les distances

Définition : La distance entre deux points $A(x_A)$ et $B(x_B)$ se calcule par :

$d(A,B)=|x_B-x_A|$ (ou $(|x_A-x_B|)$.

Propriétés : On a les équivalences suivantes :

- $d(x,a) \leq r$
- $|x-a| \leq r$
- $a-r \leq x \leq a+r$
- $x \in [a-r ; a+r]$