

LES NOMBRES COMPLEXES

PLAN

I : Généralités

- 1) Historique
- 2) Définition
- 3) Conjugaison
- 4) Module et inégalité triangulaire
- 5) Argument
 - a) Définition
 - b) Forme trigonométrique
 - c) Exponentielle complexe
 - d) Formule d'Euler
 - e) Groupes

II : Utilisation des complexes

- 1) Formule de Moivre
- 2) Linéarisation
- 3) Réduction de $a\cos\theta + b\sin\theta$
- 4) Racines d'un complexe
 - a) racine carrée, méthode algébrique
 - b) racine $n^{\text{ème}}$: méthode trigonométrique
 - c) racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité
- 5) Interprétation géométrique

I : Généralités

1- Historique

Les nombres complexes, tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XIX^{ème} siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression "partie imaginaire"). Ils sont apparus lorsque l'on a essayé de résoudre les équations du 3^{ème} degré. Le premier à avoir résolu des équations du 3^{ème} degré du type $x^3 + px = q$ ($p > 0, q > 0$) semble être Scipione Del Ferro (1465 – 1526), professeur à l'université de Bologne. Il ne publia pas sa découverte mais la transmit à son élève Antonio Maria Fior. En 1531, Tartaglia (1500 – 1557), soit à la lumière d'une indiscretion, soit par sa propre invention, apprit également à résoudre les équations du 3^{ème} degré. Croyant à une imposture, Fior lança un défi public à Tartaglia. A la fin du temps imparti, Tartaglia avait résolu toutes les équations de Fior, alors que celui-ci n'avait résolu qu'une seule équation de Tartaglia. La supériorité de Tartaglia provient du fait que ce dernier savait résoudre les équations du type $x^3 + px^2 = q$, chose que Fior ne savait pas faire. En 1539, Tartaglia accepta de dévoiler son secret à Cardan (1501 – 1576) qui le publia peu après, malgré la colère de Tartaglia. Un élève de Cardan, Ludovico Ferrari (1522 – 1565), parvint à résoudre les équations du 4^{ème} degré. Signalons qu'on ne peut résoudre n'importe quelle équation

algébrique par radicaux. C'est impossible pour la plupart des équations du 5^{ème} degré, par exemple $x^5 + x - a = 0$, avec $a = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 \dots$

Voici comment procède Cardan. Considérant l'identité :

$$(a + b)^3 = 3ab(a + b) + a^3 + b^3$$

Cardan explique en 1545 comment résoudre les équations du type :

$$x^3 = px + q$$

en posant $ab = \frac{p}{3}$ et $a^3 + b^3 = q$. Ayant trouvé a et b , une solution est donnée alors par $a + b$.

Exemple 1 : Résoudre $x^3 = 18x + 35$.

$$\begin{cases} ab = 6 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 b^3 = 6^3 = 216 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases}$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de l'équation $X^2 - 35X + 216 = 0$, à savoir 8 et 27. Donc $a = 2$ et $b = 3$.

Une solution de l'équation initiale est donc 5. Les autres solutions sont trouvées en factorisant :

$$x^3 - 18x - 35 = (x - 5)(x^2 + 5x + 7) \text{ etc...}$$

(Les équations du second degré à discriminant négatif sont considérées comme n'ayant pas de solution à l'époque).

Exemple 2 : Résoudre $x^3 = 15x + 4$

$$\begin{cases} ab = 5 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 b^3 = 5^3 = 125 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases}$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$. Cette équation admet un discriminant négatif. Elle est donc réputée ne pas avoir de solution. Est-ce à dire que l'équation initiale n'admet pas non plus de solution ? Si. Toute équation du troisième degré admet au moins une solution (pourquoi ?). Ici, 4 est racine évidente. Bombelli (1526–1573) eut l'idée de penser que les parties "impossibles" ou imaginaires devaient s'éliminer pour redonner la racine réelle. Il écrivit donc :

$$a^3 = 2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1} \Rightarrow a = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

$$b^3 = 2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1} \Rightarrow b = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

$$\text{et } 4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

De fait, on peut vérifier que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

de sorte que la solution de Cardan vaut également $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$, ce qui donne effectivement 4. Les solutions sont, en notation moderne :

$$a = 2 + i \text{ et } b = 2 - i \Rightarrow a + b = 4$$

$$a = (2+i)j \text{ et } b = (2-i)j^2 \Rightarrow a + b = -2 - \sqrt{3}$$

$$a = (2+i)j^2 \text{ et } b = (2-i)j \Rightarrow a + b = -2 + \sqrt{3}$$

où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ est racine cubique de 1. Les trois racines trouvées sont bien racines de :

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$$

Bombelli fut donc le premier à introduire une notation proche de notre notation moderne. Mais l'utilisation des nombres imaginaires a mis plusieurs siècles avant de s'imposer.

Girard (1595–1632) déclare :

De quelle utilité sont ces solutions impossibles¹ ? Je réponds : pour trois choses. Pour la certitude des règles générales, pour leur utilité, et parce qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Mais ses vues avancées à l'époque n'ont guère eu d'influence.

Il faut attendre le XIX^{ème} siècle pour que les nombres imaginaires soient universellement adoptés. La représentation géométrique des nombres complexes par les points du plan joue un grand rôle dans cette acceptation, le support géométrique apportant une caution aux yeux de nombreux mathématiciens de l'époque.

En 1798, Wessel qui est arpenteur, introduit un axe imaginaire perpendiculaire à l'axe réel. Il note ε pour $\sqrt{-1}$, et interprète les vecteurs du plan comme des nombres complexes.

Argand, quant à lui, interprète en 1806 les nombres négatifs comme ayant une direction opposé aux nombres positifs. A cette époque, on note encore $a : b :: c : d$ pour désigner le fait que la grandeur a est à la grandeur b ce que la grandeur c est à la grandeur d . Argand note donc que $1 : 1 :: -1 : -1$ et que $1 : -1 :: -1 : 1$, à savoir, 1 est à 1 ce que -1 est à -1 , et 1 est à -1 ce que -1 est à 1. Il se demande alors quelle quantité x vérifiera $1 : x :: x : -1$, à savoir, 1 est à x ce que x est à -1 . Il a l'idée de se placer dans le plan et de voir que la quantité x est celle qui est orthogonale à la droite définissant 1 et -1 . x joue évidemment ici le rôle du complexe $\pm i$. Il propose d'abandonner le qualificatif d'imaginaire, et de qualifier x de *quantités médianes*.

Mais les mémoires de ces deux auteurs resteront confidentiels. Celui de Wessel, figurant dans les Mémoires de l'Académie des Sciences du Danemark, passera complètement inaperçu, et ne sera traduit en français qu'en 1897. Celui d'Argand aura plus de chance, puisqu'il fera l'objet d'articles dans les Annales de Gergonne en 1813-14. Les complexes prendront définitivement leur statut moderne grâce à l'influence de Gauss, dont le renom dépasse de loin celui des précédents personnages. Déjà en 1799, Gauss utilise implicitement le plan complexe dans sa thèse. En 1811, il écrit :

De même qu'on peut se représenter le domaine entier de toutes les quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même, on peut se figurer le domaine entier de toutes les quantités, les quantités réelles et imaginaires au moyen d'un plan indéfini où tout point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b , représente pour ainsi dire la quantité $a + bi$.

Et en 1831 :

Si le point de vue que l'on avait de ce sujet était jusqu'à présent mauvais, et donc enveloppé de mystère et d'obscurité, c'est largement en raison d'une terminologie inadaptée qui aurait dû être blâmée. Si, au lieu d'unité positive, négative et imaginaire — ou pire encore impossible — l'on avait nommé $+1$, -1 et $\sqrt{-1}$, disons, unité directe, inverse et latérale, on aurait à peine vu paraître une telle obscurité.

ou encore :

Aussi longtemps que les quantités imaginaires étaient basées sur la fiction, elles n'étaient pas pleinement acceptées en mathématiques, mais plutôt regardées comme quelque chose que l'on devait tolérer ; elles étaient loin d'avoir acquis le même statut que les quantités réelles. Il n'y a plus aucune justification à une telle discrimination, maintenant que la métaphysique des nombres imaginaires a été pleinement éclairée, et qu'il a été montré qu'ils avaient une signification aussi réelle que les nombres négatifs.

C'est à partir de cette époque que Gauss emploie le terme "complexe" en lieu et place du terme "imaginaire". C'est également au cours du XIX^{ème} siècle que les nombres complexes commencent à être largement utilisés en physique.

¹ il s'agit des nombres complexes