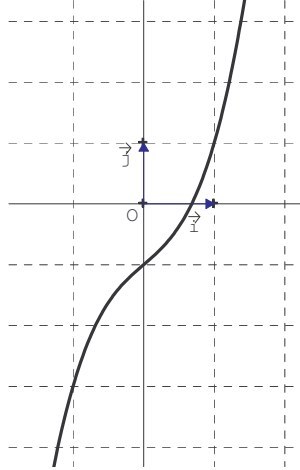


Exemple Cet exemple illustre une situation classique :

Dans le cas où f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

(En effet, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors $0 \in [f(a), f(b)]$ et on peut appliquer les théorèmes précédents.)

Résolution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$



La fonction définie par $x \mapsto f(x) = x^3 + x - 1$ est dérivable sur $[0; 1]$. Sa dérivée $f'(x) = 3x^2 + 1$ est strictement positive sur $[0; 1]$, par conséquent f est strictement croissante sur $[0; 1]$. Puisque f est dérivable sur $[0; 1]$ elle est également continue sur cet intervalle. Enfin $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ on en déduit que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$.

En appliquant le même raisonnement à l'intervalle $[0,6; 0,7]$ on en déduit qu'une valeur approchée de la solution à 0,5 près est : 0,65.

4

Théorème 2

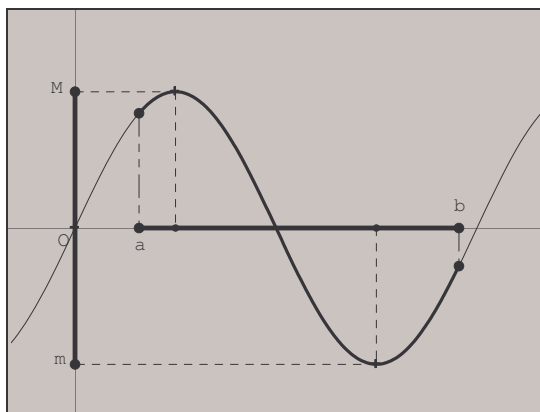
Si une fonction est **dérivable** sur un intervalle I alors elle est **continue** sur I .

Remarque : La réciproque de ce théorème est en général fausse

Théorème 3 dit « des valeurs intermédiaires »

Si f est continue sur un **intervalle fermé** $I = [a, b]$ alors $f(I)$ est un **intervalle fermé** : $f(I) = [m, M]$ m étant le minimum de f sur I et M son maximum sur I . Alors pour tout réel k de l'intervalle $[m, M]$ l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a, b]$

Corollaire : Théorème de la bijection : Si de plus f est **strictement monotone** sur $[a, b]$ alors cette solution est unique.



2

• L'image par f de l'intervalle $[a, b]$ n'est pas, en général, l'intervalle $[f(a), f(b)]$.

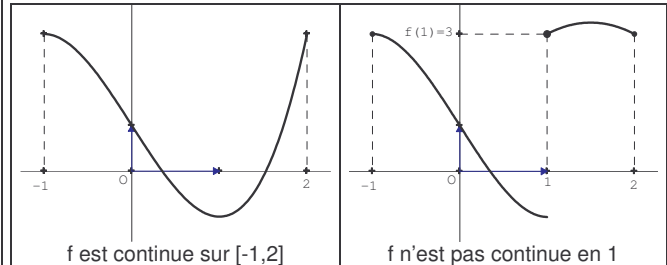
Fonctions continues sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit a un réel de I .

- f est continue en a signifie que f admet une limite en a égale à $f(a)$
- f est continue sur I signifie qu'elle est continue en tout réel de I .

Remarque : Si f est continue sur I , on peut dessiner sa représentation graphique *sans lever le crayon*.



Théorème 1

Les fonctions polynôme, fractions rationnelles, $x \mapsto \sqrt{ax+b}$, $x \mapsto \sin(ax+b)$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$ ainsi que celles obtenues à partir de leurs *sommes, produits, quotients* ou *composition* sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

1

Conséquences - Résolution d'équations

Utilisation du Théorème des valeurs intermédiaires et de son Corollaire : Théorème de la bijection

Bijection – Fonction réciproque

Le théorème précédent se généralise aux intervalles

ouverts en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la monotonie stricte.

x	a	b
f	c	d

↗

x	a	b
f	c	d

↘

Dans ces 2 situations, on dit que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[c, d]$ (les bornes de ces intervalles peuvent être ouvertes ou fermées et a, b, c, d peuvent être des valeurs « infinies »). Il est alors possible de définir la fonction réciproque de f notée f^{-1} par :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a, b] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in [c, d] \end{cases}$$

3