

1 Suites et fonctions

1.1 Limites

1. Déterminer la limite d'une fonction
 ➔ voir la fiche donnée à ce sujet.
2. Déterminer la limite d'une suite
 ➔ utiliser les limites des suites de bases, en particulier les suites géométriques.
 ➔ utiliser les théorèmes du type : « toute suite croissante et majorée converge » ...
 ➔ utiliser les mêmes théorèmes que pour les fonctions si $u_n = f(n)$.

1.2 Dérivabilité

1. Justifier la dérivabilité d'une fonction
 ➔ sur un intervalle, en reconnaissant la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions dérivables.
 ➔ en un point a , en montrant que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.
2. Calculer la dérivée d'une fonction
 ➔ en connaissant les formules!

1.3 Courbes représentatives

1. Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a
 ➔ $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
2. Déterminer si \mathcal{C}_f admet une asymptote
 ➔ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = a$ comme asymptote
 ➔ asymptote horizontale en $\pm\infty$ et verticale en a
 ➔ si $f(x) = ax + b + \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \epsilon(x) = 0$, alors \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote en $\pm\infty$.
3. Montrer que \mathcal{C}_f admet un centre de symétrie I
 ➔ après un éventuel changement de repère, on montre que, dans le nouveau repère, \mathcal{C}_f est la courbe représentative d'une fonction impaire.
 ➔ on peut aussi montrer que pour tout point M de \mathcal{C}_f , son symétrique par rapport à $I(x_I; y_I)$ appartient aussi à \mathcal{C}_f : $\frac{f(x_I + h) + f(x_I - h)}{2} = y_I$.
4. Montrer que \mathcal{C}_f admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = a$

- ➔ on montre que D_f est centré en a et que pour tout h tel que $a + h \in D_f$, $f(a + h) = f(a - h)$
- ➔ on montre que $\forall h, f(a + h) = f(a - h)$.

5. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = k$
 ➔ en résolvant l'équation directement si c'est possible (second degré...)
 ➔ si ce n'est pas possible, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection (cas d'une solution unique).

1.4 Suites et récurrence

1. Déterminer le sens de variation d'une suite
 ➔ étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.
 ➔ si (u_n) est à termes strictement positifs, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$.
 ➔ si $u_n = f(n)$ on étudie les variations de f .
 ➔ utilisation d'un raisonnement par récurrence (en particulier si $u_{n+1} = f(u_n)$ et que l'on connaît les variations de f).
2. Raisonner par récurrence
 ➔ on montre que la propriété est vraie au premier rang;
 ➔ on montre que si cette propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$;
 ➔ on conclut.

1.5 Fonction exponentielle

1. Connaître les propriétés algébriques et propriétés de base (domaine de définition, variations, limites, dérivée, valeurs particulières, représentation graphique, $e^{a+b} = e^a \times e^b \dots$)
 ➔ c.f. cours!
2. Déterminer des limites
 ➔ en $\pm\infty$, la fonction exponentielle « tend plus vite vers $+\infty / 0$ que tout autre type de fonction » (*attention, ce type de phrase est pratique pour se souvenir de l'idée, mais est absolument à proscrire dans les copies...*)
3. Résoudre une équation du type $e^{u(x)} = e^{v(x)}$
 ➔ on utilise : $\forall a, b \in \mathbb{R}, e^a = e^b \iff a = b$
4. Résoudre une inéquation
 ➔ on utilise le fait que la fonction exponentielle est croissante $\forall a, b \in \mathbb{R}, e^a < e^b \iff a < b$.

1.6 Équations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y' = ay + b \quad (a \neq 0)$$

➔ on résout l'équation différentielle associée sans second membre $y' = ay$.

Les solutions sont les fonctions du type ke^{ax} , avec $k \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière sous forme de constante : $-\frac{b}{a}$ convient

Les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre les autres équations différentielles

$$(E) : y' = ay + g(x) \quad (a \neq 0)$$

➔ on résout l'équation différentielle associée sans second membre $y' = ay$.

Les solutions sont les fonctions du type ke^{ax} , avec $k \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière $y_0(x)$ (la forme sera donnée dans l'énoncé)

Les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax} + y_0(x), \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2 Nombres complexes

1. Savoir passer de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique puis...

➔ si $z = a + ib$, alors $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\arg(z) = \theta$ avec

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2. Conjugué d'un nombre complexe

➔ utile pour supprimer le « i » du dénominateur.

➔ en particulier, penser que $\frac{1}{i} = -i$, ce qui sert pour la simplification d'un quotient que l'on retrouve très souvent :

$$\frac{a + ib}{b - ia} = \frac{a + ib}{-i(-\frac{b}{i} + a)} = -\frac{1}{i} \times \frac{a + ib}{bi + a} = i$$

3. Résoudre une équation

➔ deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie imaginaire et la même partie réelle.

➔ $z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z} \iff \arg(z) = 0 \quad [\pi]$.

➔ z est imaginaire pur ssi $\text{Re}(z) = 0 \iff z = -\bar{z} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

4. Complexes et géométrie

➔ $|z_B - z_A| = AB$ et

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})$$

➔ \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires \iff

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = 0 \quad [\pi] \iff \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$$

A, B et C sont alignés si, et seulement si, \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires

➔ $\vec{AB} \perp \vec{CD} \iff \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ est un imaginaire pur

Remarque : plusieurs « théorèmes » énoncés ci-dessus sont donnés sous une forme « abrégée ». Ne les appliquez pas tels quels ! Vérifiez bien **toutes les hypothèses !!** (voir le cours...)