

$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093\dots$

Fonction exponentielle

Théorème et définition

Il existe une unique fonction, appelée **fonction exponentielle** définie sur \mathbb{R} , notée \exp telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(0) = 1$

Remarque :

La fonction exponentielle est solution de l'équation différentielle : $y' - y = 0$. Elle vérifie la *condition initiale* $y(0) = 1$

Relation caractéristique

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y : \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

En notant « e » le nombre $\exp(1)$, on démontre par récurrence à partir de la relation précédente que :

Pour tout entier naturel n : $\exp(n) = e^n$. En *convenant* alors de noter pour un réel x , $\exp(x)$ sous la forme e^x on obtient les relations algébriques fondamentales suivantes :

Relations fondamentales

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ pour tous réels } x \text{ et } y : \begin{cases} e^0 = 1 ; e^x > 0 \\ e^{x+y} = e^x e^y ; (e^x)^n = e^{nx} \\ e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \end{cases}$$

1

Dérivée de la fonction e^u

En appliquant le théorème relatif à la dérivation des fonctions composées :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Résolution d'équations ou d'inéquations

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b : \begin{cases} e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \\ e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b \end{cases}$$

Exemple :

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} : e^{3x-1} = \frac{e^{2x}}{e^{x-1}}$$

Cette équation est définie sur \mathbb{R} puisque e^{x-1} n'est jamais nul.

$$e^{3x-1} = e^{2x} e^{-(x-1)} = e^{x+1}$$

par conséquent : $3x - 1 = x + 1$ et finalement : $S = \{1\}$

Fonctions exponentielles de base a

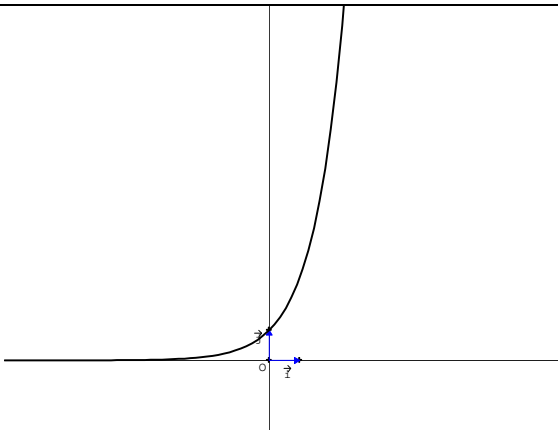
Pour tout nombre réel a strictement positif et tout réel x , on pose :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

3

Étude analytique

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée et est strictement positive. Elle est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .



Représentation graphique de la fonction exponentielle

Limites usuelles

Les limites suivantes constituent des limites de référence :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

2

Résolution de l'équation différentielle $y' - ay = b$

a et b sont des réels donnés et $a \neq 0$.

Montrons tout d'abord que les solutions de l'équation $y' - ay = 0$ sont les fonctions définies par : $f(x) = ke^{ax}$ où k est un réel.

Preuve :

- $f'(x) = kae^{ax} = af(x)$ donc $f' - af = 0$ et f est une solution.
- Si g est une autre solution de l'équation, on considère la fonction u définie par : $u(x) = \frac{g(x)}{e^{ax}}$. On obtient facilement : $u'(x) = \frac{g'(x) - ag(x)}{e^{ax}}$ ce qui prouve que $u' = 0$ puisque g vérifie $y' - ay = 0$. u est donc constante et par conséquent $u(x) = k$ soit $g(x) = ke^{ax}$.

Passons à l'équation « avec second membre » : $y' - ay = b$

En posant $z = y - \frac{b}{a}$ on obtient $z' = y'$ et :

$z' - az = y' - a\left(y - \frac{b}{a}\right) = y' - ay + b$. Par conséquent si y est solution de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ alors la fonction z vérifie : $z' - az = b$

Et finalement :

Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = b$ sont les fonctions définies par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

4