

## Dérivation – L'indispensable

### Définitions

- Une fonction  $f$  est dérivable en un point  $a$  d'un intervalle où elle est définie si :

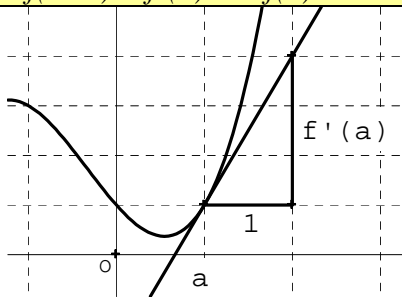
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad (\text{limite finie})$$

Par exemple le nombre dérivé de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2$  au point  $a = 3$  est :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$$

### Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$

- On appelle **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , le *coefficient directeur de la tangente* à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$ .
- Le nombre dérivé est noté  $f'(a)$ .
- La fonction dérivée est la fonction qui à tout  $x$  de  $I$  fait correspondre  $f'(x)$ .
- Approximation affine locale : c'est « confondre » la courbe avec sa tangente donc  $f(a+h) \approx f'(a) \cdot h + f(a)$



Équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A(a; f(a))$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

1

### Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Remarques
$\lambda$	0	$\lambda$ un réel quelconque
$x$	1	
$x^n$	$nx^{n-1}$	$n$ : entier relatif et même fractionnaire...
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$x > 0$
$\cos x$	$-\sin x$	
$\sin x$	$\cos x$	

### Opérations – $u$ et $v$ des fonctions dérivables

Fonction	Dérivée	Remarques
$u+v$	$u'+v'$	
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$	
$u(ax+b)$	$a \cdot u'(ax+b)$	$a$ et $b$ réels

### Spécifique au programme de TS (ROC)

#### Dérivée d'une fonction composée

$f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et  $g$  est dérivable sur un intervalle  $J$ . On suppose que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x)$  appartient à  $J$ . Alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' \quad \text{soit :}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \times f'(x)$$

2

## THÉORÈME FONDAMENTAL

$f$  étant une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :

- Si  $f'$  est **strictement positive** sur  $I$  (sauf en quelques points isolés où  $f'$  s'annule) alors  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$ .
- Si  $f'$  est **strictement négative** sur  $I$  (sauf en quelques points isolés où  $f'$  s'annule) alors  $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$ .
- Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- Si  $f(x_0)$  est un **extremum local** de  $f$ , alors  $f'(x_0) = 0$
- Si  $f'$  s'annule et change de signe en  $x_0$  alors  $f(x_0)$  est un **extremum local**.

3

### Vos commentaires personnels :

.....

.....

.....

.....