Exercices sur les suites type BAC (1)

Exercice 1 - Pondichéry mars 2005 **4 points**

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}.$$

a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 - Amérique du Nord - juin 2005 **6 points**

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1~;~2]$ alors $f(x) \in [1~;~2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} \leqslant v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Pour tout entier naturel $n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
En déduire que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \geqslant 0$ et
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.

Annexe : exercice 2