FONCTION PARTIE ENTIÈRE[1] - CORRECTION

Chacun des repères indiqués dans ce problème est orthonormal et l'unité est un centimètre.
La fonction partie entière, notée E, est définie pour tout réel x de la façon suivante : E(x) est l'entier relatif immédiatement inférieur ou égal à x. Par exemple $E(3{,}1)=3,\ \ E(-4{,}6)=-5\ \ et\ \ E(2)=2.$.

Voir les commentaires calculatrices à la fin du document…

Étude de la fonction partie entière

1° Calculer

$$E(6)=6\ ;\ E\left(\frac{1}{2}\right)=0\ ;\ E\left(-\frac{3}{4}\right)=-1\ ;\ E(-18{,}3)=-19\ ;\ E(\pi)=3\ ;\ E(-\sqrt{5})=-3\ ;\ E(\sqrt{2})=1.$$

2° Comparer E(x), x et E(x) +1 pour tout x réel.

3° Comparer E(x+*1*) et E(x) +1. Revenir à la définition

$E(x)=n,\ n\in\mathbb{N}\ tel\ que : n\le x<n+1$ donc

$E(x+1)$ vérifie $n+1\le x+1<n+2$ ce qui donne $E(x+1)=n+1=E(x)+1$

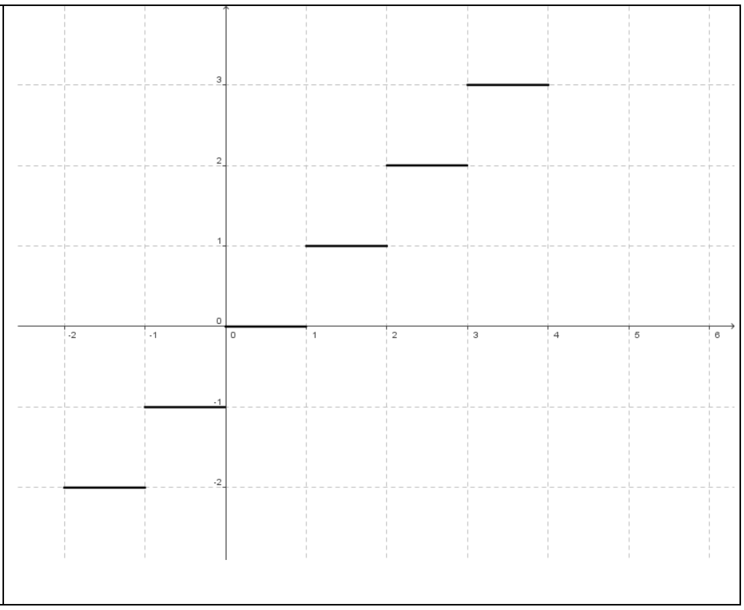
4° Définir E(x) = 0 pour tout x élément de l'intervalle [0 ; 1[.

5° Représenter E pour tout x réel dans le repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$

6° Résoudre graphiquement les équations suivantes :

$E(x)=0 \Leftrightarrow x\in[0;1[\ \ ;\ \ E(x)=4 \Leftrightarrow x\in[4;5[$

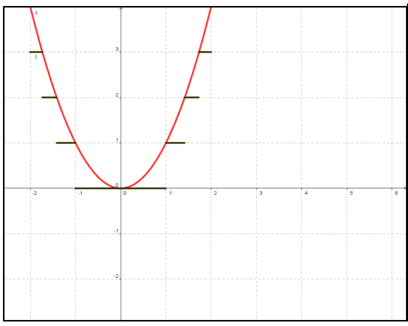
$E(x)=-3 \Leftrightarrow x\in[-3;-2[\ ;\ E(x)=\frac{1}{2}\ imposs...$

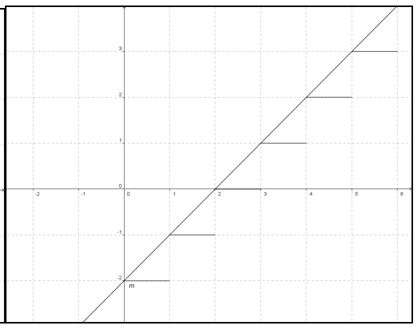


Partie entière d'une fonction

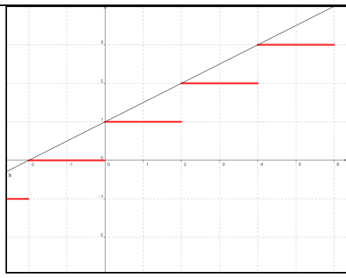
1° Dans le repère $(O_1\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, représenter les fonctions définies pour tout réel x par $x\mapsto\frac{1}{2}x+1$ et $x\mapsto E\left(\frac{1}{2}x+1\right)$.

2° Procéder de même pour représenter les fonctions définies par $x\mapsto E\left(2x-1\right)\ \ et\ \ x\mapsto E(x^2)$, respectivement dans les repères $(O_2\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ et $(O_3\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

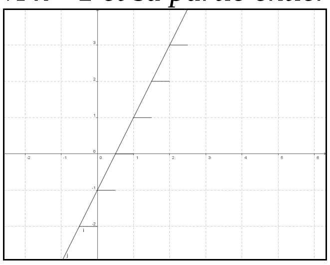




$E(x^2)$ et x² et x – 2 et sa partie entière



½ x +1 et sa partie entière



2x – 1 et sa partie entière

[1] La calculatrice connaît en général la fonction partie entière…

3° Dans le repère $(O_4 \ ; \vec{i}, \ \vec{j})$, représenter *f* et *g* définies pour tout réel *x* par $f(x) = E(x-2)$ et $g(x) = E(3-x)$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. (voir ci-contre)

4° Définir, pour tout *x* réel, la fonction définie par $x \mapsto (-1)^{E(x)}$. Représenter cette fonction dans le repère $(O_5 \ ; \vec{i}, \ \vec{j})$. Quelle est la particularité de cette fonction ? Période : 2 à cause de la parité cela donne +1 ou -1.

5° Soit h la fonction définie par $h(x) = E\left(x - 2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

a) Montrer que *h* est périodique de période 2.

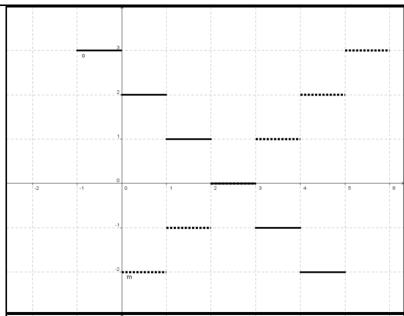
$$h(x+2) = E\left(x+2-2E\left(\frac{x+2}{2}\right)\right) = E\left(x+2-E\left(\frac{x}{2}+1\right)\right) =$$

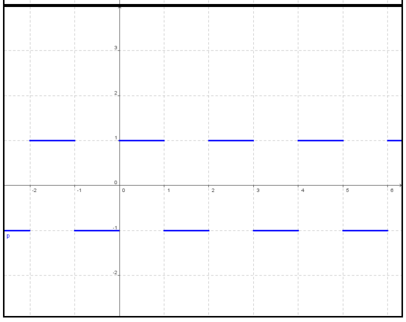
$$E\left(x+2-E\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) = h(x) \ car \ E(x+1) = E(x)+1$$

b) Définir *h* sur l'intervalle [0 ; 2[:

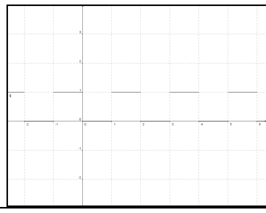
$$0 \le x < 2 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{2} < 1 \, donc \ E\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \ et \ h(x) = E(x) \ pour \ 0 \le x < 2$$

c) Représenter *h*, pour tout *x* réel, dans le repère $(O_6 \ ; \vec{i}, \ \vec{j})$. Penser à utiliser la périodicité, on répète…





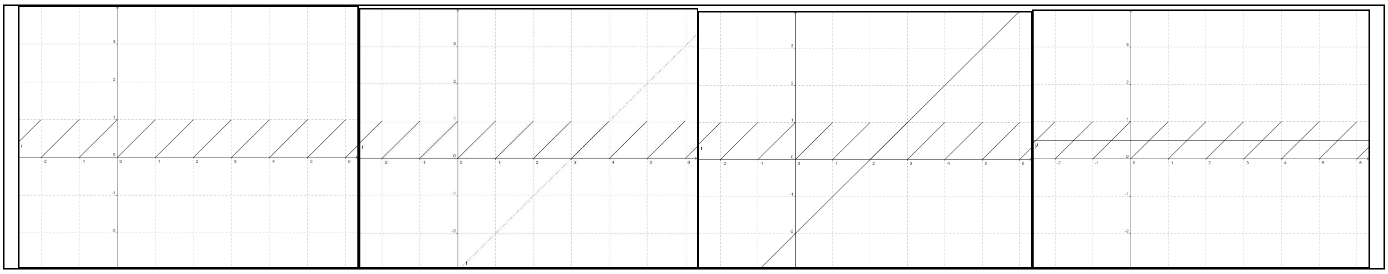
$(-1)^{E(x)}$



Étude de la fonction m définie par $m(x) = x - E(x)$

1° Montrer que *m* est périodique de période 1 ; pareil que précédemment…

2° Définir *m* sur l'intervalle [0 ; 1[, $m(x) = x - E(x) \ avec \ 0 \le x < 1 \ alors E(x) = 0 \ donc \ m(x) = x$ puis représenter m, pour tout *x* réel, dans le repère $(O_7 \ ; \vec{i}, \ \vec{j})$. Voir ci-dessous



3° Définir le plus grand intervalle sur lequel *m* a même restriction que la fonction définie par $x \mapsto x-3$.

4° Résoudre graphiquement les équations $m(x) = \frac{1}{2} \ \ et \ \ m(x) = x-2$.

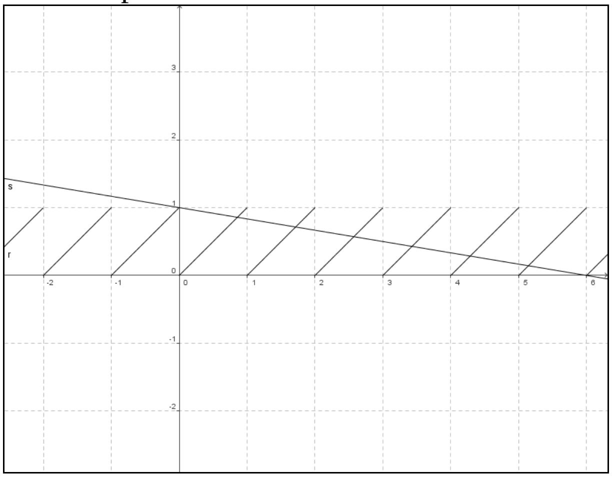
5° Par le calcul et à l'aide d'une représentation graphique, déterminer les solutions de l'équation $m(x) = 1 - \frac{x}{5}$. On observe l'intersection pour $x \in [0;5]$ écrivons l'égalité

$$m(x) = 1 - \frac{x}{5} \Leftrightarrow x - E(x) = 1 - \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = \frac{(1+E(x))5}{6}$$

Si *E(x) =0* alors *x*= 5/6 ; si *E(x) =1* alors *x= 5/3 ;* Si *E(x) =2* alors *x* = 5/2 ; si *E(x) =3etc…*
On retrouve la périodicité sur

6° Soit n un entier strictement positif. Résoudre l'équation $m(x)=1-\frac{x}{n}$.

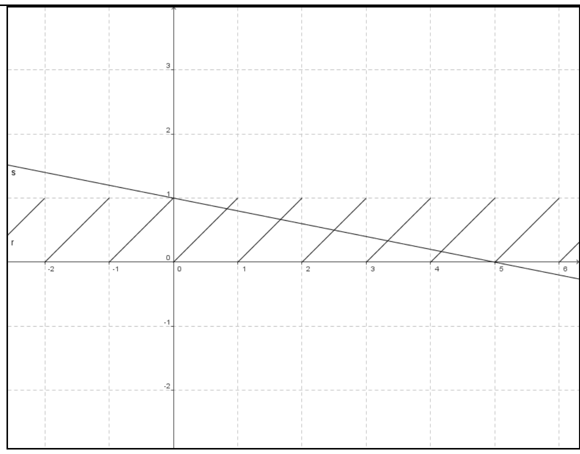
Il faut généraliser le processus de 5 à n, on peut observer pour 6 :

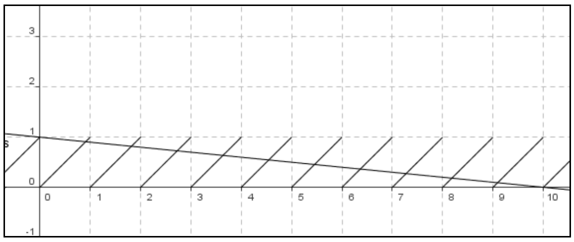


L'intersection est pour $x\in[0;6]$

On résout de la même façon et on obtient :

$x=\frac{\left(1+E(x)\right)n}{n+1}$ on fait varier x sur $[0 ; n]$





Pour n = 10

PARTIE ENTIÈRE ET CALCULATRICES !

Version TI anglaise… Avec la touche MATH sur TI89	Version TI française… Avec la touche MATH sur TI89	Sur CASIO 85-75 Version anglais Intg(x) (integer : entier)	Mais attention Parfois des versions utilisent int(x)… mais… Pensez à tester !