Exercices « type BAC » - Nombres complexes

L'usage d'une calculatrice est autorisé mais bof…

Exercice 1 : Corrigé en classe, pour le 2 : Ne pas oublier $Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$

Exercice 2 : fait en classe, 3 solutions, identification, dont deux solutions conjuguées.

Exercice 3 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O},\vec{\text{u}},\vec{\text{v}})$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation d'inconnue z :
   $z^2 + 8\sqrt{3}z + 64 = 0$. Les solutions sont justement a et b
2. Triangle OAB équilatéral
3. On appelle G le barycentre des points pondérés $(\text{O};-1)$, $(\text{D};1)$ et $(\text{B};1)$.
   Rappel :
   $$G \text{ barycentre de } (A,a)(B,b)(C,c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \text{ avec } a+b+c \neq 0$$
   Si on passe en complexe c'est pareil : $z_G = \dfrac{a.z_a + b.z_b + c.z_c}{a+b+c}$
   a. On applique ce qui précède à $(\text{O};-1)$, $(\text{D};1)$ et $(\text{B};1)$.G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\text{i}$.
   b. OBGD est un parallélogramme : choisir une définition « économique » et correcte bien sur ! « *Les diagonales se coupent en leur milieu…* » donc cherchons le milieu de [OG] : $\dfrac{z_G}{2} = \dfrac{-4\sqrt{3}+6i}{2} = -2\sqrt{3} + 3i$ de même pour le milieu de [BD] : $\dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{-4\sqrt{3}+4i+2i}{2} = -2\sqrt{3}+3i$ le même…

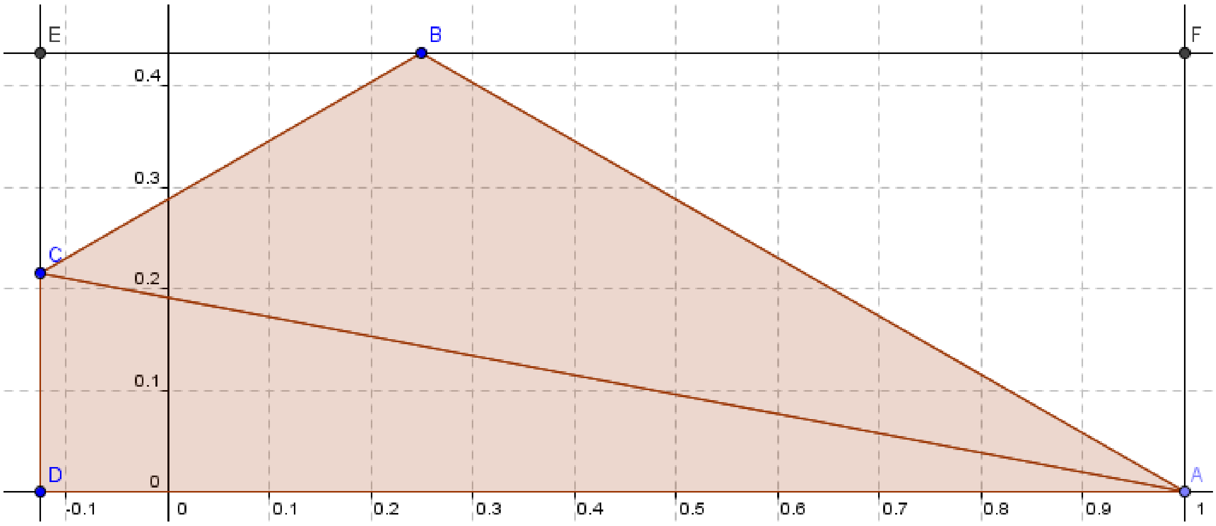
Exercice 4 : z = $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ on met le module en facteur… Pour élever à la puissance one élève le module à la puissance 2 ou 3 et on multiplie les arguments par 2 ou 3.

$z^2 = \dfrac{1}{4}\left(cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = -\dfrac{1}{8} + i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$; $z^3 = \dfrac{1}{8}\left(cos\left(\dfrac{3\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\dfrac{3\pi}{3}\right)\right) = -\dfrac{1}{8}$

Calculer l'aire, en cm², du quadrilatère ABCD. Plusieurs méthodes, par exemple par soustraction d'aires : $a_{ABCD} = a_{AFED} - a_{EBC} - a_{BFA}$ qui dont des rectangles et des triangles rectangles voir la figure ci-dessous ; attention on a pour unité 4cm donc (unité)² = 16 cm²

$a_{AFED} = \left(1 + \dfrac{1}{8}\right) \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{32} \times 16cm^2$; $a_{EBC} = \left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{3}{4}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{32} \times 16cm^2$;

$a_{BFA} = \left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{8} \times \dfrac{3}{8}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{128} \times 16cm^2$ après calcul : $a_{ABCD} = \dfrac{21\sqrt{3}}{8} cm^2$



Exercice 5 : On considère la fonction *f* qui, à tout point M d'affixe z différent de *i*, associe le point M' d'affixe z' = $\dfrac{z+2}{z-i}$

a) Soit A le point d'affixe 1 + 2 i : $\dfrac{1+2i+2}{1+2i-i}=\dfrac{3+2i}{1+i}=\dfrac{(3+2i)(1-i)}{2}=\ldots$

b) Soit B' le point d'affixe *1 + i* ; déterminer l'affixe du point B antécédent de B' par *f*.

$$\frac{z+2}{z-i}=1+i \Leftrightarrow z+2=(1+i)(z-i) \Leftrightarrow -iz=-i-1 \Leftrightarrow z=\frac{1+i}{i}=1-i$$

c) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que | z'| = 1.

Si $\left|\dfrac{z+2}{z-i}\right|=1=\dfrac{|z+2|}{|z-i|} \Leftrightarrow \dfrac{MP}{MQ}=1$avec P d'affixe -2 et Q d'affixe *i*. M est la médiatrice de [PQ].

d) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

Méthode bien connue si z' est imaginaire pur alors $z'=-\overline{z}$ puis finir avec la forme algébrique, on trouve une équation à décrypter ou alors utiliser les arguments avec les points précédents P et Q : $\dfrac{z+2}{z-i}\,\textit{imaginaire pur} \Leftrightarrow Arg\left(\dfrac{z+2}{z-i}\right)=\dfrac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MP}\right)=\dfrac{\pi}{2}(\pi)$ ce qui représente le cercle de diamètre [PQ[bien sur Q exclu à cause du dénominateur mais P accepté car alors z' = 0 qui est un imaginaire pur…

Autre solution pour l'aire (multiplier le résultat par 16 cm²)