La géométrie en complexe - Éléments de correction

Soit dans le plan complexe e repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ *les points A(a) ; B((b) sont fixes.*

On étudie l'ensemble des points M(z) tels que le complexe $\frac{z-b}{z-a}$ *vérifie certaines conditions.*

<u>Objectif : définir l'ensemble des points M, construire cet ensemble.</u>

1. Conditions sur le module : $\left|\frac{z-b}{z-a}\right|$ ***= k réel positif !*** Si $k > 0$; comment traduire $\left|\frac{z-b}{z-a}\right|$

$\left|\frac{z-b}{z-a}\right| \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = k \Leftrightarrow MB^2 = k^2.MA^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MA}\right) = 0$ ***Avec k positif toujours !***

<u>La nullité de ce produit scalaire représente 3 cas :</u>

a. $\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MA}=0$ M est le barycentre de (B, 1) et (A,-k) sous réserve que $1-k \neq 0$, donc on le construit avec $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{(1-k)}$; si k = 1 on a MA = MB, M est sur la médiat….

b. $\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MA}=0$ M est le barycentre de (B, 1) et (A, k) sous réserve que $1+k \neq 0$ ce qui est obligé puisque k est positif. Donc on le construit avec $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{(1+k)}$

c. $\left(\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MA}\right)=0$ produit scalaire nul, les vecteurs sont orthogonaux mais comment les calculer ? On utilise l'existence du barycentre G de (B, 1) et (A, -k) et G' celui de (B, 1) et (A, k) ; ils vérifient comme précédemment : $\overrightarrow{G'B}-k\overrightarrow{G'A}=0 ; \overrightarrow{GB}+k\overrightarrow{GA}=0$; on calcule avec la relation de Chasles ce produit scalaire. $\left(\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}-k\overrightarrow{MG}+k\overrightarrow{GA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MA}\right)=0$
en bref : $(1-k)\overrightarrow{MG}.(1+k)\overrightarrow{MG'}=0 \Leftrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$ avec $1-k^2 \neq 0$ donc : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$
M est sur le cercle de diamètre [GG'] avec G et G' points trouvés au a) et b).

<u>Remarque</u> : j'insiste sur k > 0 car si k <0 on peut aussi avoir la relation $\left(\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MA}\right)=0$ cela donne la même situation car $(-k)^2 = k^2$, et l'ensemble de points est le même mais il représente les points M tels que $\left|\frac{MA}{MB}\right| = k$, rapport de longueurs donc positif…

2. Conditions sur l'argument de $\frac{z-b}{z-a}$; Arg $\frac{z-b}{z-a}$ = *θ [2π] ; cela signifie que* $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\theta\,[2\pi]$
   a. Si une mesure de l'argument est $0\,[2\pi]$; M est sur la droite (AB) privée de [AB]
   b. Si une mesure de l'argument est $0\,[\pi]$; M est sur la droite (AB) privée de A et B
   c. Si une mesure de l'argument est $\pi\,[2\pi]$; M est sur le segment] AB[donc privé de…
   d. Si une mesure de l'argument est $\pi\,[\pi]$ cela revient au cas b)
   e. Si une mesure de l'argument est $\frac{\pi}{2}[2\pi]$; <u>Le demi cercle</u> de diamètre]AB[donc privé de…
   f. Si une mesure de l'argument est $\frac{\pi}{2}[\pi]$; Le cercle de diamètre] AB[privé toujours de …
   g. Si une mesure de l'argument est $\theta\,[2\pi]$; il faut se souvenir du théorème de l'angle inscrit (3ème) qui dit deux choses en termes d'angles géométriques : *« L'angle inscrit qui intercepte une corde d'un cercle ne change pas de mesure, sa mesure étant deux fois celle de l'angle au centre ».* Pour la construction [AB] étant fixé on construit le triangle isocèle de base [AB] ayant pour angle au sommet (C) la valeur θ/2 qui sera l'angle au centre du cercle passant par A et B, sur ce cercle tout point du côté de C par rapport à [AB] aura pour mesure θ. Étude très simple avec θ = 45°.

3. Conditions sur Z = $\frac{z-b}{z-a}$; utilisons ce qui précède en 1 et 2 ; A et B fixés.
   a. *Z* est un réel positif ; Z = 2 double travail module vaut 2 et angle θ = 0 [2π]
   b. Z est un réel négatif ; Z = -2 double travail module vaut 2 et angle θ = π [2π]
   c. Z est un imaginaire pur ; Z = *i* double travail module vaut 1 et angle θ = π/2 [2π]