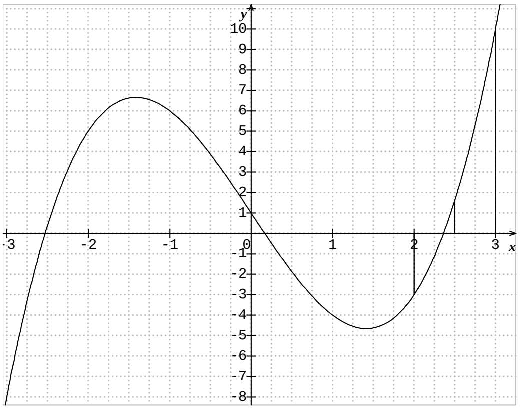
TS	Correction - Dichotomie	Analyse TP 01
	On pourra s'aider du livre pages 25, 26 et 150	

Rappel mathématique :



Le graphique ci-contre représente la fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x + 1$ sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
Puisque *f* est continue, strictement croissante sur $I = [2 ; 3]$ et qu'elle change de signe sur *I*, le corollaire du théorème des *valeurs intermédiaires* (théorème de la bijection) permet d'affirmer qu'il existe dans *I* une unique valeur α telle que $f(\alpha) = 0$. Sous les hypothèses ci-dessus, la méthode de la ***dichotomie*** (du grec *dicho* = deux et *tomie* = couper) permet de trouver une valeur approchée de la solution α...
Voici le principe de cette méthode qui consiste à construire deux suites *adjacentes*[1] (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier *n*, α appartient à l'intervalle $I_n = [a_n ; b_n]$

Algorithme de la dichotomie « *manuellement* » à la calculatrice :

Votre travail répondre aux questions ci-dessous…

1. A l'aide du tableau des valeurs de votre calculatrice, compléter (jusqu'à *n=5*) le tableau ci-dessous

n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(a_n).f(c_n)$
0	2	3	2,5	-3	1,625	-4,875
1	2	2,5	2,25	-3	-1,109375	3,328125
2	2,25	2,5	2,375	-1,109375	0,14648438	-0,1625061
3	2,25	2,375	2,3125	-1,109375	-0,50854492	0,56416702
4	2,3125	2,375	2,34375	-0,50854492	-0,18789673	0,09555393
5	2,34375	2,375	2,359375	-0,18789673	-0,02243423	0,00421532

Quelle est la valeur approchée de α obtenue par cette méthode ? 2,359375
Quelle est l'erreur maximale commise ? 2,375 - 2,359375 = 0,015625 (**$b_n - c_n$**)

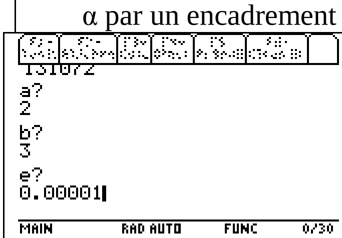
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante : **il faut étudier le signe de**

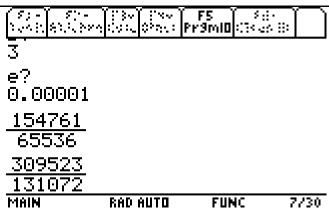
$a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0$ **<u>ou</u>** $c_n - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0$ *car* $b_n - a_n > 0$ *;* de même avec la suite (b_n**)** on étudie :

$b_{n+1} - b_n = 0 \quad ou\ b_{n+1} - b_n = c_n - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0$ ce qui prouve qu'elle est décroissante

Vérifier que $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$: $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \quad ou\ c_n - a_{n+1} = c_n - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$

3. En déduire que $q_n = b_n - a_n$ est une suite géométrique : car $q_{n+1} = \dfrac{1}{2} q_n$ dont on précisera la raison (1/2) et le premier terme ($b_0 - a_0 = 3\text{-}2 = 1$). Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$ = 0 car (0< 1/2 <1) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ puis que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes conformément à la définition de la page 150. Conclusion : les suites tendent vers une même limite qui est la solution « exacte » de l'équation *f(x)* = 0 sur [2 ; 3].
4. Programmation suivant votre calculatrice : entrer le programme de la page 26 correspondant, l'intérêt ici par rapport à la démarche manuelle précédente est de fixer l'erreur. Utiliser le programme pour déterminer α par un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-5}.





la calculatrice « *coince* » car les valeurs approchées de ces fractions sont… égales !
Avec Excel :
2,36146545410156
2,36147308349609
Erreur effectivement inférieure à 10^{-5}

[1] Notion qui sera précisée dans le cadre de l'étude des suites. A étudier page 150