Exercice I :

CORRECTION - PONDICHÉRY MARS 2005

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} \leqslant 0,95 u_n \iff \dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leqslant 0,95\dfrac{n^{10}}{2^n}$
   $\iff (n+1)^{10} \leqslant 1,9 n^{10} \iff \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \iff \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$

2. (a) La fonction $1+\dfrac{1}{x}$ étant dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$, la fonction f l'est aussi et $f'(x) = 10\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^9 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) < 0$.

   Donc f est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. On a $f(1) = 2^{10}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10} = 1$.

   (b) Conclusion f est continue (car dérivable) et décroissante de 2^{10} à 1, donc bijective. Il existe donc un unique réel α de $[1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1,9$.

   (c) Avec la calculatrice on trouve que $f(15) > 1,9$ et $f(16) < 1,9$. Donc $n_0 = 16$.

   (d) On a $n \geqslant 16 \geqslant \alpha \Rightarrow f(n) \leqslant f(16) \leqslant f(\alpha)$ soit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. (a) D'après la question **1.** et pour tout entier n supérieur à 16
   $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9 \iff u_{n+1} \leqslant 0,95 u_n$.
   Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 16.

   (b) Comme de plus $u_n \geqslant 0$ la suite (u_n) converge vers un réel supérieur ou égal à zéro.

4. • Initialisation : on a $u_{16} \leqslant 0,95^0 u_{16}$.
   • Hérédité : hypothèse $0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}$. D'après la question **1.**
   $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,95 u_n \leqslant 0,95 \times 0,95^{n-16} u_{16} \iff 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,95^{n-15} u_{16}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. On a donc pour tout naturel n supérieur ou égal à 16 : $0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}$.
   Or $0,95^{n-16}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison telle que $-1 < 0,95 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^{n-16} = 0$. D'après l'encadrement démontré par récurrence et d'après le théorème des « gendarmes »

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice II :

CORRECTION AMERIQUE NORD JUIN 2005

1. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, et :

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

   Donc f est croissante sur $[0\,;2]$, et comme f est continue l'image de $[1\,;2]$ par f est
   $[f(1); f(2)] = [\frac{3}{2}; \frac{5}{3}] \subset [1;2]$, ainsi :

$$\text{si } x \in [1\ ;\ 2] \text{ alors } f(x) \in [1\ ;\ 2]$$

2. (a)

   (b) Soit P_n la proposition de récurrence : $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   Comme $v_0 = 2$ alors P_0 est vraie.
   Supposons P_n vraie, alors $1 \leqslant v_n \leqslant 2$, donc $1 \leqslant f(v_n) \leqslant 2$, d'aprés la relation démontrée à la question 1.
   Ainsi si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie, mais P_0 est vraie, donc pour tout n, P_n est vraie.

Ainsi pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

Soit Q_n la proposition de récurrence : $v_{n+1} \leqslant v_n$
Or $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ donc $v_1 \leqslant v_0$. Donc Q_0 est vraie.
Supposons Q_n vraie, alors $v_{n+1} \leqslant v_n$, mais v_n et v_{n+1} sont deux nombres de $[0\,;2]$, donc comme f est croissante sur $[0\,;2]$, alors :

$$f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \Leftrightarrow v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.
Ainsi, si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie, mais Q_0 est vraie, donc pour tout n, Q_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

(c)

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\ &= \frac{(2u_n+1)(v_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} \\ &= \frac{2u_nv_n+u_n+2v_n+1-2u_nv_n-2u_n-v_n-1}{(u_n+1)(v_n+1)} \\ &= \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \end{aligned}$$

Soit R_n la relation de récurrence : $v_n - u_n \geqslant 0$
Or $v_0 - u_0 = 2 - = 1$, donc R_0 est vraie.
Supposons R_n vraie, alors $v_n - u_n \geqslant 0$, mais :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\overbrace{v_n - u_n}^{>0}}{\left(\underbrace{v_n+1}_{>0}\right)\left(\underbrace{u_n+1}_{>0}\right)}$$

Donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$.
Ainsi, si R_n est vraie alors R_{n+1} est vraie, mais R_0 est vraie, donc pour tout n, R_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel $v_n - u_n \geqslant 0$.

Comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3$ et $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
De même, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{v_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Or

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n-u_n}{4}$$

(d) En procédant par récurrence, on démontre que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \underbrace{(v_0 - u_0)}_{=1}$$

(e) Comme la suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 2, alors u est convergente.
Comme la suite (v_n) est décroissante ($v_n \geqslant v_{n+1}$) et minorée par 1, alors v est convergente.
Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

et comme pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$,

alors d'aprés le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{u\ et\ v \text{ convergent}} \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel α.

Comme f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et u converge vers α, alors :

$$\begin{aligned}
\alpha = f(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \\
&\Leftrightarrow \alpha(\alpha+1) = 2\alpha+1 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Or comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.