

◆ **Egalité**

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à  $2\pi$  près

Ou sous une autre forme : pour  $z$  et  $z'$  non nuls :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

**III. NOTATION EXPONENTIELLE ET PROPRIETES**

**1. Définition et exemples**

Le complexe de module égal à 1 et dont un argument est  $\theta$  est noté  $e^{i\theta}$

On a donc 

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{et} \quad |e^{i\theta}| = 1$$

On en déduit que  $e^{i\pi} = -1$ ,  $e^{i\pi/2} = i$  et  $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$

Tout complexe  $z$  non nul peut s'écrire sous la forme 
 $z = |z|e^{i\theta}$ 
 **appelée aussi forme exponentielle de  $z$ .**

- Toute écriture  $z = re^{i\theta}$  (avec  $r$  et  $\theta$  réels) est-elle une forme exponentielle ?

Si  $r$  est un réel non nul,  $|z| = |re^{i\theta}| = |r||e^{i\theta}|$  or  $|e^{i\theta}| = 1$  donc  $|z| = |r|$

---si  $r > 0$ , alors  $|r| = r$  donc  $|z| = r$  donc, dans ce cas  $z = re^{i\theta}$  est une forme exponentielle

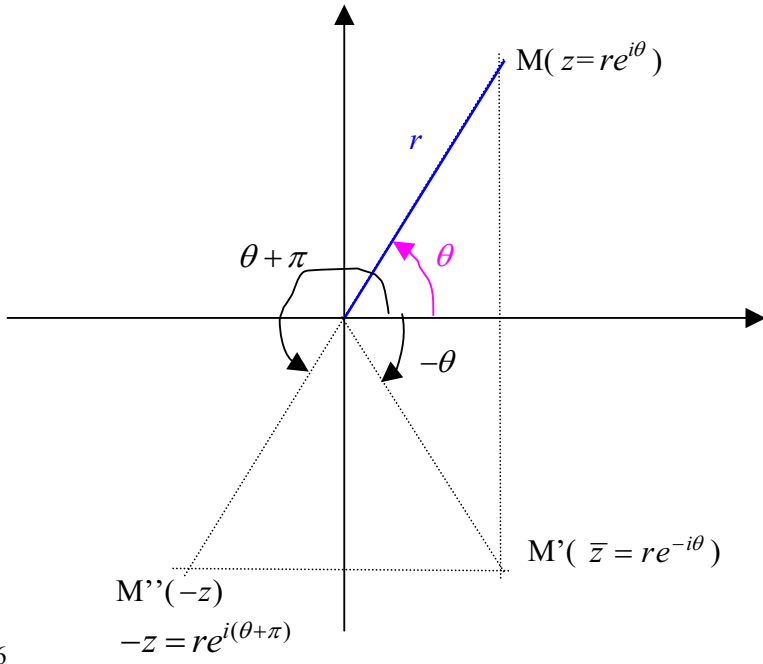
--- si  $r < 0$ , alors  $|r| = -r$  (module= valeur absolue) donc  $|z| = -r$  et alors  $z = re^{i\theta}$  peut s'écrire sous la forme  $z = (-r)(-e^{i\theta})$  donc  $z = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$ , le module de  $z$  est égal à  $-r$  et un argument de  $z$  est égal à  $\theta+\pi$ .

**Exemple** : la forme exponentielle de  $z = -5$  est  $5e^{i\pi}$ , la forme exponentielle de  $z = -2i$  est  $2e^{-i\pi/2}$

**2. Propriétés**

- Si  $\theta$  est un argument de  $z$ , alors un argument de  $\bar{z}$  est  $(-\theta)$  et  $(\theta + \pi)$  est un argument de  $(-z)$ . (cf. dessin ci-contre)

D'où  $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$  et  $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$



- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$   
donc si  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$  alors  $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

**A retenir**

Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$  si et seulement si  $\theta = \theta' + k2\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

- De  $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases}$  on déduit les formules d'Euler

**Formules d'Euler**

$$\cos = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

**A retenir**

◆ **Formule de Moivre**

Soit  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $|z^n| = |z|^n = 1$  et  $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi] = n\theta [2\pi]$

On en déduit que  $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  d'où pour n entier

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

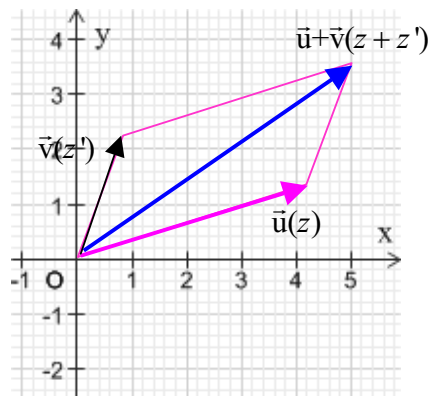
**IV. COMPLEXES ET GEOMETRIE**

**1. Interprétation d'opérations sur les complexes**

**1.1. Somme de complexes**

A partir des propriétés sur les complexes et sur les vecteurs, on peut déduire que :

$$\text{affixe}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{affixe}(\vec{u}) + \text{affixe}(\vec{v})$$



### Interprétation de l'inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

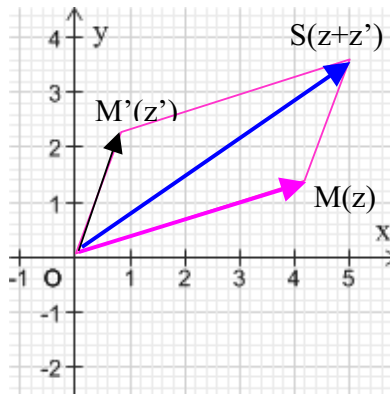
Cette inégalité peut s'écrire  $\|\overline{OM} + \overline{OM'}\| \leq \|\overline{OM}\| + \|\overline{OM'}\|$

Avec le dessin ci-contre

$$|z + z'| = OS$$

l'inégalité triangulaire est la traduction de :

$$OS \leq OM + MS \quad \text{ou encore de } OS \leq OM + OM'$$



### 12. Différence de complexes

et affixe  $(-\vec{u}) = -\text{affixe}(\vec{u})$

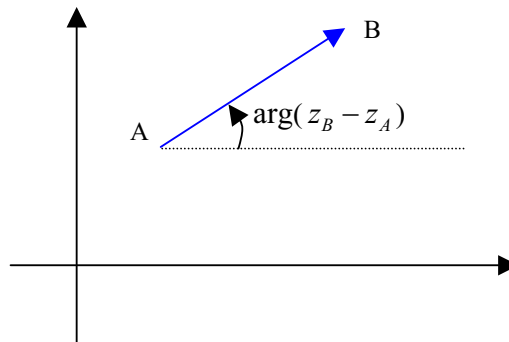
d'où  $\text{affixe}(\vec{u} - \vec{v}) = \text{affixe}(\vec{u}) - \text{affixe}(\vec{v})$

De cette égalité, on déduit que  $\text{affixe}(\overline{AB}) = \text{affixe}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \text{affixe}(\overline{OB}) - \text{affixe}(\overline{OA})$  et donc

Si  $z_A$  et  $z_B$  sont les affixes des points A et B alors :  $\text{affixe}(\overline{AB}) = z_B - z_A$

- On en déduit alors

Si  $z_A$  et  $z_B$  sont les affixes des points A et B distincts alors  $\arg(z_B - z_A) = (\vec{e}_1, \overline{AB})$  à  $2\pi$  près et  $AB = \|\overline{AB}\| = |z_B - z_A|$



- Si  $z_A, z_B$  et  $z_C$  sont les affixes de trois points A, B et C distincts, alors  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\vec{e}_1, \overline{AC}) - (\vec{e}_1, \overline{AB})$

Donc  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$  D'où

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

### 13. Produit par un réel

$\text{affixe}(\lambda \vec{u}) = \lambda \text{affixe}(\vec{u})$

## 2. Transformations du plan et complexes

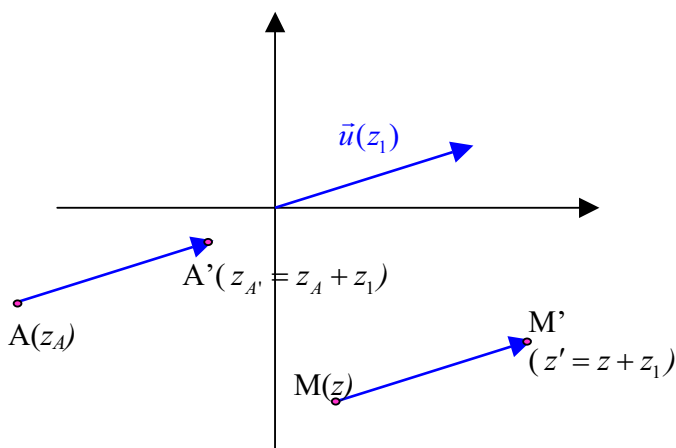
### 21. Translation

Soit  $z_1$  un complexe non nul et  $\vec{u}$  un vecteur d'affixe  $z_1$ .

La transformation plane qui, à tout point  $M(z)$  fait

de vecteur  $\vec{u}$

**Rappel** : la translation de vecteur  $\vec{u}$  est l'application qui, à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que  $\overline{MM'} = \vec{u}$

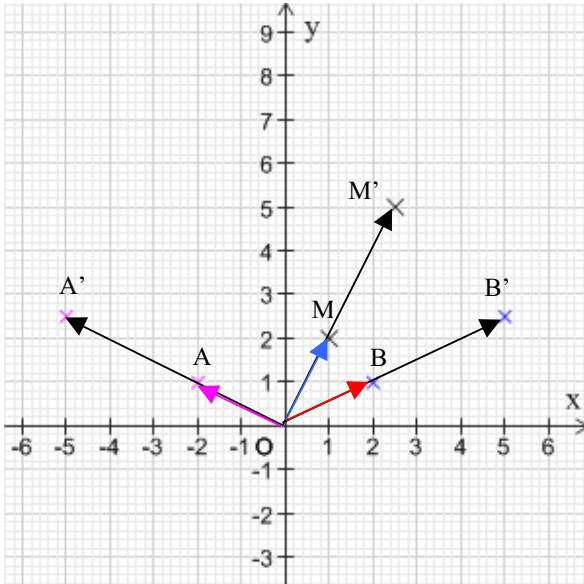


## 22. Homothéties

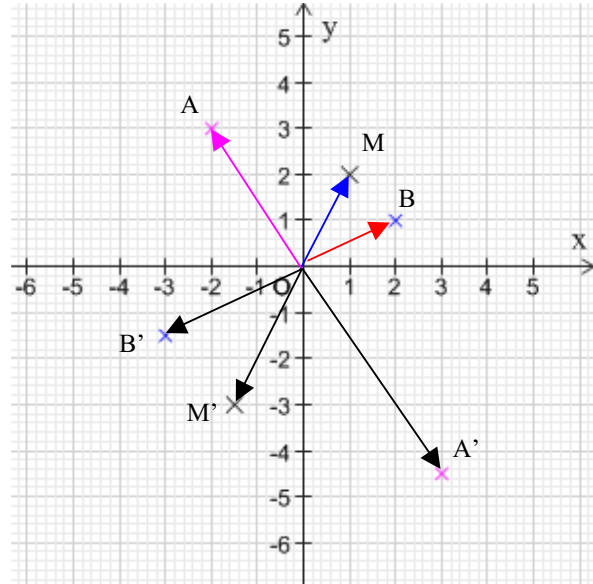
Rappel : Soit  $\lambda$  un réel non nul et I un point du plan. L'homothétie de centre I et de rapport  $\lambda$  est l'application qui, à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que  $\overline{IM'} = \lambda \overline{IM}$

Avec des complexes

La transformation plane qui, à tout point M(z) fait correspondre  $M'(z')$  tel que  $z' = \lambda z$  est l'homothétie de centre O et de rapport  $\lambda$ .



homothétie avec un rapport positif



homothétie avec un rapport négatif

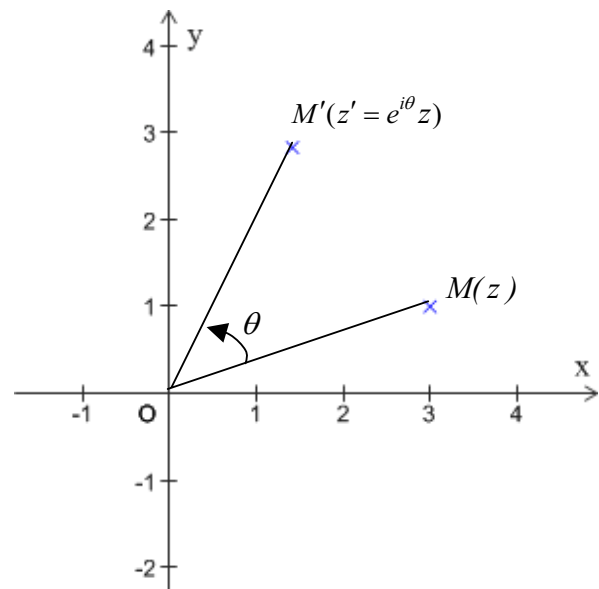
## 23. Rotations

Rappel : Soit  $\theta$  un réel non nul et I un point du plan. La rotation de centre I et d'angle  $\theta$  est l'application qui, à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que  $(\overline{IM}, \overline{IM'}) = \theta$

Avec des complexes :

Soit  $a$  un complexe non nul de module égal à 1. Notons  $a = e^{i\theta}$  la forme trigonométrique de  $a$ .

**La transformation plane qui, à tout point M(z) fait correspondre  $M'(z')$  tel que  $z' = az = e^{i\theta} z$  est la rotation de centre O et d'angle  $\theta$ .**

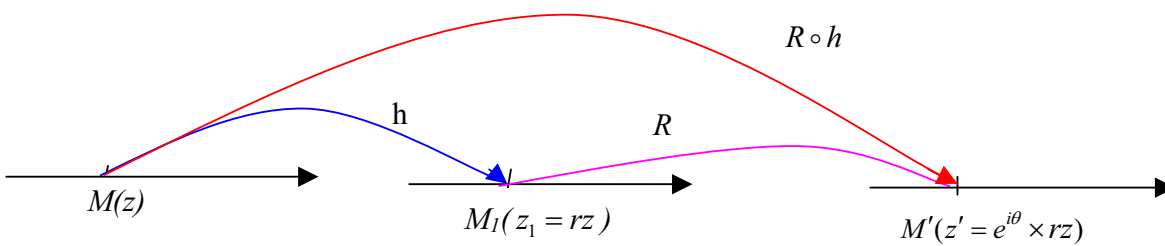
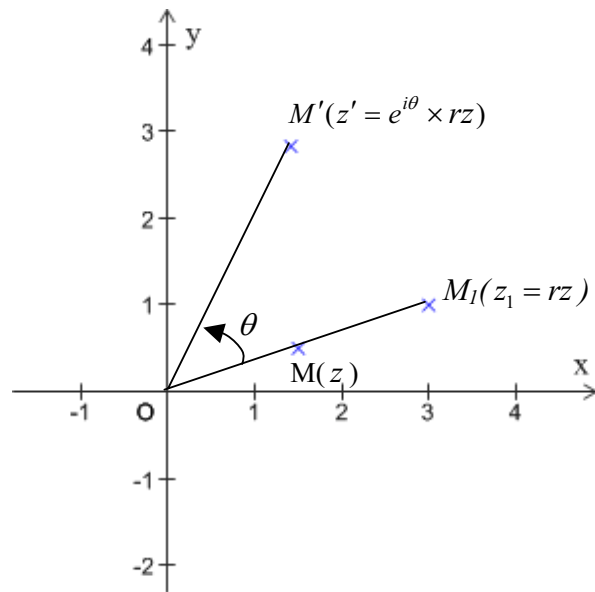


### 23. Similitudes

Soit  $a$  un complexe non nul. Notons  $a = re^{i\theta}$  la forme trigonométrique de  $a$ .

**La transformation plane  $s$  qui, à tout point  $M(z)$  fait correspondre  $M'(z')$  tel que  $z' = az = re^{i\theta}z$  est la composée d'une homothétie  $h$  de rapport  $r > 0$  et d'une rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ . C'est une similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $r$  et d'angle  $\theta$**

Remarque : si  $r=1$ , l'homothétie  $h$  est en fait l'identité et  $s=R$



$$S = h \circ R = h \circ R$$

## V. EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

### 1. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

#### 11. Racines carrées d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe non nul  $a$ , il existe deux complexes dont le carré est égal à  $a$ . Ces deux complexes sont opposés.

Résolution de l'équation  $z^2 = a$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$  (e)

- ◆ si  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$
- ◆ si  $a \in \mathbb{R}^-$ ,  $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$
- ◆ si  $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$  ( $a$  complexe non réel), on écrit  $a$  sous forme exponentielle  $a = \rho e^{i\alpha}$   $\rho > 0$

une solution de (e) est  $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}}$ , l'autre solution est alors  $-\sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}}$

**Exemples :**

◆ L'équation  $z^2 = -6$  a deux solutions opposées  $i\sqrt{6}$  et  $-i\sqrt{6}$

remarque :  $z^2 = -6 \Leftrightarrow z^2 + 6 = 0$  donc  $z^2 = -6 \Leftrightarrow z^2 - (-6) = 0$

soit  $z^2 - (i\sqrt{6})^2 = 0$  ce qui équivaut à  $(z - i\sqrt{6})(z + i\sqrt{6}) = 0$  on retrouve alors les deux solutions opposées

◆ Pour  $z^2 = 3 - 3i$  :  $|3 - 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  donc  $3 - 3i = 3\sqrt{2}(\dots) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Une solution de l'équation est donc  $\sqrt{3\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}} = 18^{1/4}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ , l'autre solution est le complexe opposé

$$-\sqrt{3\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}} = -18^{1/4}e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

**12. Equation du second degré**

Considérons l'équation du second degré à coefficients dans  $\mathbb{C}$  : (e)  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

◆ si  $\Delta = 0$ , (e) admet une seule solution dans  $\mathbb{C}$  :  $z_1 = \frac{-b}{2a}$  et alors  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$

◆ si  $\Delta \neq 0$ , en notant  $z_0$  l'une des racines carrées de  $\Delta$ , (e) admet deux solutions dans  $\mathbb{C}$  :  
 $z_1 = \frac{-b - z_0}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + z_0}{2a}$  et alors  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

**Exemple :** Factoriser l'expression  $4x^2 + x + 3$  dans  $\mathbb{C}$  :

En résolvant  $4x^2 + x + 3 = 0$  dans  $\mathbb{C}$ , on trouve  $z_1 = -\frac{1}{8} - i\frac{1}{8}\sqrt{47}$  et  $z_2 = -\frac{1}{8} + i\frac{1}{8}\sqrt{47}$

Donc  $4x^2 + x + 3 = 4\left(x + \frac{1}{8} + i\frac{1}{8}\sqrt{47}\right)\left(x + \frac{1}{8} - i\frac{1}{8}\sqrt{47}\right)$  (attention à ne pas oublier le 4 devant le produit, erreur courante)

◆ **Remarque :** si l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  est à coefficients dans  $\mathbb{R}$  (c'est à dire si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ) Alors les deux solutions sont conjuguées

**2. Equations du type  $z^n = a$  avec  $a \in \mathbb{C}$ , racines nièmes d'un nombre complexe**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . L'équation  $z^n = a$  admet exactement  $n$  solutions dans  $\mathbb{C}$  appelées racines nièmes du complexe  $a$

Pour les trouver, on écrit  $z$  et  $a$  sous forme exponentielle

$$z = re^{i\theta}, a = \rho e^{i\alpha} \text{ avec } r > 0 \text{ et } \rho > 0$$

l'équation initiale (e)  $z^n = a$  est alors équivalente à  $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\alpha}$

on utilise alors la propriété « Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à  $2\pi$  près »

$$\text{Donc (e)} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ donc } \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On peut montrer qu'il suffit de choisir  $n$  entiers successifs pour  $k$  pour obtenir les  $n$  racines nièmes du complexe  $a$ .

Les  $n$  racines nièmes de  $a$  sont donc les complexes qui peuvent s'écrire  $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$  avec  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

Ou encore  $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$  avec  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

**Propriétés des racines nièmes : les  $n$  points images des racines nièmes d'un complexe forment un polygone régulier .** Si  $n=3$ , on obtient un triangle équilatéral, si  $n=4$  un carré, si  $n=5$  un pentagone régulier, si  $n=6$  un hexagone régulier...

Démonstration à connaître (permet de revoir des propriétés des complexes)

En effet, avec  $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$  avec  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $|z_k| = \sqrt[n]{\rho}$  donc  $OM_k = \sqrt[n]{\rho}$ ,

Donc **les points  $M_k$  sont tous sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt[n]{\rho}$ .**

De plus

$$\text{pour } 1 \leq k \leq n-1 \quad \left(\overline{OM_{k-1}}; \overline{OM_k}\right) = \arg(z_k) - \arg(z_{k-1}) = \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) - \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

$$\text{Et } \left(\overline{OM_{n-1}}; \overline{OM_0}\right) = \arg(z_0) - \arg(z_{n-1}) = \left(\frac{\alpha}{n}\right) - \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 2\pi + \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

$$\text{On a donc aussi } \left(\overline{OM_{n-1}}; \overline{OM_0}\right) = \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$