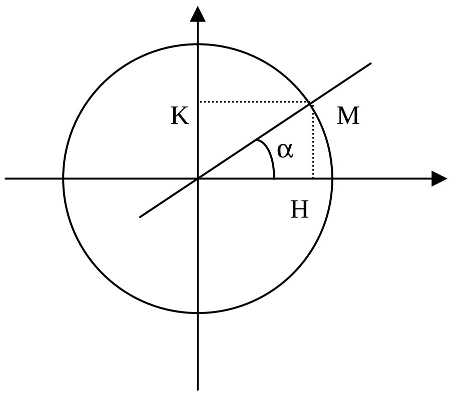
TRIGONOMETRIE

1) COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE REEL, D'UN ANGLE

Considérons un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le cercle trigonométrique de centre O.
Soit M un point du cercle, H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, K le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



Notons M (x;y).
Le cosinus de α est l'abscisse du point M : Soit, $\cos \alpha = x$
Le sinus de α est l'ordonnée du point M : Soit, $\sin \alpha = y$

Pour tout réel α , on a : $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

2) FORMULES TRIGONOMETRIQUES

a) Formules élémentaires

Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Pour tout $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

En effet $\cos(\pi/2) = 0$, de même que $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$

b) Formules d'addition : Pour tous réels a et b,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\qquad$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

c) Formules de duplication : Pour tout réel a,

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ $\qquad$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

d) Formules relatives aux angles associés : Pour tout réel α, k étant un entier relatif.

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$ $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$

e) Tableau de valeurs

mesure	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
cosinus	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sinus	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

EXERCICES DE TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1

1) Tracer un triangle ABC rectangle en B tel que AC = 1, puis retrouver les valeurs de cos(π/4) ; sin (π/4) ; tan (π/4).
2) De la même manière tracer un triangle DEF rectangle en E permettant de retrouver les valeurs de : cos (π/6) ; sin (π/6) ; tan (π/6) ; cos (π/3) ; sin (π/3) ; tan (π/3)

EXERCICE 2

Sans calculatrice, donner les valeurs des sinus, cosinus et tangentes de :

π/6 ; 5π/6 ; 7π/6 ; 9π/6 ; π/3 ; 4π/3 ;; 71π/3 ; 834π/6 ; -512π/3 ; 1975π/6 ; π/4 ; -π/2 ; 3π/4 ; 7π/2 ; -3π/4 ; -5π/4 ; 181π/4

EXERCICE 3

1) Sachant que $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que cos x = 0,3 , déterminer sin x et tan x sans calculer x.

2) Même question avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

EXERCICE 4

Démontrer la formule suivante, indiquée par François Viète dans son Canon Mathématicus achevé en 1579 :

$\sin \alpha = \sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha)$

EXERCICE 5

Montrer que pour tout x réel,

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

b) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x$

d) $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \times \cos x)$

e) $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x) \times (1 + \cos x)$

f) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

EXERCICE 5 : une nouvelle formule !!

Etablir que, pour certaines valeurs de x que l'on précisera :

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

EXERCICE 6

Ecrire plus simplement :

$$E = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

EXERCICE 7

Soit la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right[$ par

$$f(x) = \frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x}$$

1) Factoriser le dénominateur et montrer qu'il ne s'annule pas sur $I = \left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right[$

2) Pour tout x élément de I, simplifier f(x). Indication : factoriser le numérateur en utilisant : sin 6x = sin(4x + 2x)