

Exemple (suite) :

Soit les événements A : « le résultat est pair » et B : « obtenir 4 »
La probabilité d'obtenir 4 sachant que le résultat du dé est pair

$$\text{est : } P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Indépendance

Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

c'est à dire lorsque :

$$P_A(B) = P(B)$$

Formule des probabilités totales

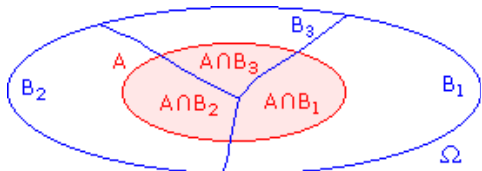
Soit B_1, B_2, \dots, B_n n événements constituant une **partition** de Ω c'est à dire tels que :

- Chaque B_i a une probabilité non nulle.
- Les événements B_i sont 2 à 2 incompatibles.
- La réunion des événements B_i est l'univers Ω .

Alors :

Pour tout événement A on a :

$$P(A) = P_{B_1}(A) \times P(B_1) + P_{B_2}(A) \times P(B_2) + \dots + P_{B_n}(A) \times P(B_n)$$



4

Probabilité

Soit une expérience aléatoire d'univers : $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Une probabilité sur Ω est définie par :

1. la donnée des n nombres positifs $P(a_i)$ tels que :

- $P(a_i)$ est compris entre 0 et 1
- $P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$

2. La probabilité de l'événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires constituant A.

Équiprobabilité

En situation d'équiprobabilité, la probabilité de n'importe quel événement élémentaire a_i est $P(a_i) = \frac{1}{n}$ n désignant le nombre d'éléments de Ω . Plus généralement, la probabilité d'un événement A est donnée par la « formule » :

$$P(A) = \frac{\text{"Nombre de cas favorables"}}{\text{"Nombre de cas possibles"}}$$

Exemple (suite) :

Reprenons l'exemple du lancer d'un dé non truqué.

- L'événement « 4 » est un événement élémentaire, sa probabilité est égale à $\frac{1}{6}$ puisque Ω contient 6 événements équiprobables.

2

Probabilités – L'indispensable (1)

Définitions

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat est soumis au hasard. Lorsqu'elle est observée dans des conditions déterminées il ne se produit pas toujours le même résultat.
- On appelle **univers** d'une expérience aléatoire, et on note Ω , l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
- Toute expérience aléatoire organisée de manière à ce qu'**aucune** de ses issues ne soit favorisée par rapport à une autre est dite être en **situation d'équiprobabilité**.

Exemple

Lancer un dé est une expérience aléatoire. L'univers Ω de cette expérience peut être codé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si le dé n'est pas truqué, toutes les faces ont les « mêmes chances de sortie » : la situation est une situation **d'équiprobabilité**.

Événements

Soit Ω un univers

- Tout sous-ensemble de Ω est appelé **événement**.
- Tout événement formé d'un seul élément est appelé **événement élémentaire**
- Le sous-ensemble vide, noté \emptyset s'appelle événement **impossible**.
- Le sous-ensemble Ω s'appelle événement **certain**.
- L'événement « **A ou B** » est le sous-ensemble $A \cup B$
- L'événement « **A et B** » est le sous-ensemble $A \cap B$
- L'événement **contraire** de A est le sous-ensemble \bar{A}

1

- L'événement A : « obtenir un résultat pair » n'est pas un événement élémentaire, il peut encore s'écrire : $A = \{2, 4, 6\}$. Tous les événements élémentaires constituant A ont une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ donc : $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- L'événement contraire de A est $B = \bar{A} = \{1, 3, 5\}$

Résultats fondamentaux

$$P(\emptyset) = 0 ; P(\Omega) = 1$$

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque

Lorsque $A \cap B = \emptyset$ on dit que les événements A et B sont **incompatibles**.

Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. On appelle probabilité (conditionnelle) de B sachant A le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

3