Suites arithmétiques et géométriques

Définitions

La suite (u_n) est ***arithmétique*** s'il existe un réel *r* tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$

La suite (u_n) est ***géométrique*** s'il existe un réel *q* tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n \times q$

Exemples

- La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$
- La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n \end{cases}$ est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

Remarques

- Certaines situations ne présentent pas beaucoup d'intérêt : (suite arithmétique de raison nulle, suite géométrique de premier terme nul ou de raison égale à 0 ou à 1).
- Une suite géométrique de raison strictement négative est une suite ***alternée*** : ses termes changent alternativement de signe.

Remarque 2

- Pour démontrer qu'une suite est ***arithmétique*** on peut calculer la différence de deux termes consécutifs : $r = u_{n+1} - u_n$. Si cette différence est constante, la suite est arithmétique de raison *r*.
- Pour démontrer qu'une suite est ***géométrique*** on peut calculer le quotient de deux termes consécutifs : $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

  Si ce quotient est constant, la suite est géométrique de raison *q*.

Calcul du terme de rang n

Suite arithmétique	Suite géométrique
$u_1 = u_0 + r$	$u_1 = u_0 \times q$
$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r$	$u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q$
soit $u_2 = u_0 + 2r$	soit $u_2 = u_0 \times q^2$
$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r$	$u_3 = u_2 \times q = (u_0 \times q^2) \times q$
soit $u_3 = u_0 + 3r$	soit $u_3 = u_0 \times q^3$
etc.	etc.

etc. cache en fait un raisonnement par récurrence. Retenons :

Suite arithmétique	Suite géométrique
$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$

Somme des termes

Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ la somme des *(n+1)* premiers termes d'une suite (u_n). Il est souvent utile de connaître l'expression de cette somme dans le cas des suites arithmétiques et géométriques.

Suite arithmétique	Suite géométrique
$S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r$	$S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

Démonstration dans le cas d'une suite géométrique.

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ (1)

En multipliant les deux membres de l'égalité par *q* :

$qS_n = q(u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n) = qu_0 + qu_1 + qu_2 + ... + qu_n$ (2)

En soustrayant « membre à membre » les égalités (1) et (2) :

$S_n - qS_n = (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n) - (qu_0 + qu_1 + qu_2 + ... + qu_n)$

En remarquant que $qu_0 = u_1$ et plus généralement que $qu_k = u_{k+1}$ on obtient :

$S_n - qS_n = (u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n) - (u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n+1})$

Beaucoup de termes s'éliminent dans cette somme donc :

$(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$ et puisque $u_{n+1} = qu_n$:

$(1-q)S_n = u_0 - qu_n = u_0 - q(q^n u_0) = u_0 - q^{n+1}u_0 = u_0(1-q^{n+1})$

A condition que *q* soit différent de 1, on peut diviser les deux membres par (1-*q*) d'où le résultat.

Limites

Suite arithmétique

Soit (u_n) une suite ***arithmétique*** de raison *r*.

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$
- Si $r = 0$ la suite est constante et $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Suite géométrique

Soit (u_n) une suite ***géométrique*** de premier terme u_0 *non nul* et de raison *q*.

- Si $q > 1$ (u_n) diverge et $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} = +\infty \text{ si } u_0 > 0 \\ \lim_{n\to\infty} = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \end{cases}$
- Si $q = 1$ (u_n) est constante et $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$
- Si $-1 < q < 1$ (u_n) converge vers 0 : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- Si $q \leq -1$ (u_n) n'a pas de limite.