

Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (admis en Terminale S)

Toute suite croissante et majorée converge

Toute suite décroissante et minorée converge

Théorème 2

Si (u) est croissante et non majorée alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Si (u) est décroissante et non minorée alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

Théorème 3 : théorème des « gendarmes »

Étant donné trois suites (u), (x), (v).

SI (1) Pour tout entier n, $u_n \leq x_n \leq v_n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$

ALORS : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$

Théorème 3 : (admis en Terminale S)

Soit f une fonction numérique et (u) une suite numérique.

SI $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

ALORS $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$

De plus si f est continue et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = a = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ donc } f(a) = a$$

4

Le raisonnement par récurrence

Le « principe de récurrence » est un axiome des mathématiques (donc on ne démontre pas ce principe) qui est mis en place lors de construction des entiers naturels \mathbb{N} .

Principe de récurrence	Soit P(n) une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier donné.
	SI : (1) P(n_0) est vraie (2) Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
	Alors : P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Exemple

Démontrons par récurrence que la somme de n premiers entiers impairs est égale à n^2 c'est à dire que :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ propriété } P(n)$$

Amorce : la propriété est vraie pour $n=1$ puisque $S_1 = 1$ et $1^2 = 1$

Hérédité :

Supposons que P(n) soit vraie à l'ordre n c'est à dire que :

$$S_n = n^2 \text{ (c'est l'hypothèse de récurrence)}$$

Il s'agit de démontrer que $S_{n+1} = (n+1)^2$

$$\text{Or } S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = S_n + (2n+1)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence : $S_{n+1} = n^2 + (2n+1)$

$$\text{Soit : } S_{n+1} = (n+1)^2$$

Conclusion : P(n) est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 1

2

Suites numériques

Définition

Une suite numérique est une fonction définie sur \mathbb{N} , ou sur l'ensemble des entiers supérieurs à un entier n_0 .

Exemples

Une suite peut être définie de plusieurs manières :

- Sous forme de fonction : $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$
- Sous forme récurrente : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

Vocabulaire

- La suite (u) est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite (u) est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite (u) est **stationnaire** à partir du rang p si $\forall n \geq p, u_{n+1} = u_n = u_p$
- La suite (u) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u) est **périodique** de période $k > 0$ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n$
- La suite (u) est **majorée** par le réel M si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- La suite (u) est **minorée** par le réel m si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- La suite (u) est **bornée** si elle est majorée et minorée

1

Limite d'une suite

Définitions

- Dire que la suite (u) tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle $[A, +\infty[$ contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
- Dire que la suite (u) tend vers $-\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty, B]$ contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
- Dire que la suite (u) tend vers le réel ℓ signifie que tout intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Dans ces définitions A, B désignent des réels quelconques et ε un réel strictement positif mais elles sont « intéressantes » lorsque :

- A est très grand
- B est très petit (négatif)
- ε est très proche de zéro

Remarque :

Lorsque la suite (u) a pour limite le réel ℓ , on dit qu'elle **converge** dans les autres cas, elle **diverge**. Que ce soit vers l'infini ou l'absence de limite (lorsque l'unicité n'est pas respectée)

3