

Exercices - Equations différentielles N°2

EXERCICE 1 - LA RÉUNION JUIN 2004

6 points

On désigne par f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x , $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} .

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

3. On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v .

d. En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans \mathbb{R} .

b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

EXERCICE 3 - LA RÉUNION JUIN 2005

4 points

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} vérifiant la condition :

$$(C) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) & = 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g .

c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Question de cours

a. On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur \mathbb{R} , de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque

b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.