Devoir du 04/01/2010

Exercice 6minutes page 103

Commentaires généraux :

- *Respectez la structure d'une démonstration :*

Objectif (en général la question) → Méthode (choisie pour l'atteindre) → exécution de la méthode (calcul par exemple…) → Conclusion (explicitation de la réponse)

- *Faites référence aux connaissances « officielles » cours – théorème – propriété –limites de référence…*
- *N'utilisez pas les symboles de la logique comme abréviation ($\Leftrightarrow$; $\Rightarrow$)*

  $\Rightarrow$ *: Si …condition(s) … Alors … déductions…*

  $\Leftrightarrow$ *: équivalence (transformations d'égalités mais en est on sur ?)*

I. Pour démontrer l'existence d'un minimum je dresse le tableau des variations… ; ce minimum me permet (1) de conclure que : $f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0$

II. Déjà corrigé (inter)

III. On travaille conformément à l'énoncé seulement sur [0 ; +∞ [et on étudie le sens de variation de *f*, afin de contrôler les conditions d'application du théorème de la bijection…

IV. Résolution classique du modèle *y' = ay + b* avec détermination des constantes avec les conditions initiales : $\begin{cases} y' = 2y - \dfrac{1}{2} \\ y(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x) = Ce^{2x} + \dfrac{1}{4} \\ y(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x) = Ce^{2x} + \dfrac{1}{4} \\ C = -\dfrac{5}{4e^4} \end{cases}$

ce qui permet de conclure en donnant la solution : $y(x) = \dfrac{3}{4e^4}e^{2x} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{-5}{4}e^{2x-4} + \dfrac{1}{4}$

V. Sans aucune difficulté…

VI. Voir l'interrogation…

Exercice A page 102 : correction déjà en ligne (exercice fait en groupe…)

Retour sur les exercices 91 et 92 page 160/161 (suites adjacentes)

Exercice 91 :

1. Reconnaître une identité remarquable (carré) en étudiant $u_n - v_n$ pour montrer que $v_n < u_n$:

   $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2}{2} > 0$ pou assurer l'inégalité stricte on peut soit procéder par récurrence soit par l'absurde…

   Se servir de cela ensuite en intégrant un concept simple mais délicat de majoration – minoration :

   a, b *positifs et* $c > b$: $\begin{cases} a - b < a \\ a + b > a \end{cases}$ *évident...* $\begin{cases} a - b > a - c \\ a + b < a + c \end{cases}$ on pourrait réfléchir à des techniques équivalentes avec des négatifs… des quotients (inverses et inégalités) !

   $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} < \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{v_n v_n}}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$ car on a remplacé dans la différence (racine carrée) u par v qui est plus petit donc le calcul est plus grand (on est dans les positifs).

2. **<u>Contraintes</u>** (3) : croissante – décroissante - $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ par observation numérique ou du fait que $v_n < u_n$ on peut faire le choix de montrer que u_n décroit et v_n croit.

   Méthode classique pour le comportement :

   étude du signe de $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} < 0$ *car* $v_n < u_n$ donc u_n décroissante ;

étude du signe de $v_{n+1}-v_n=\sqrt{u_n v_n}-v_n>\sqrt{v_n v_n}-v_n=0\ car\ v_n<u_n$ donc v_n est croissante (bien d'autres démonstrations possibles… conjugué, croissance de la racine carré…)

Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n$ penser à utiliser les résultats acquis !

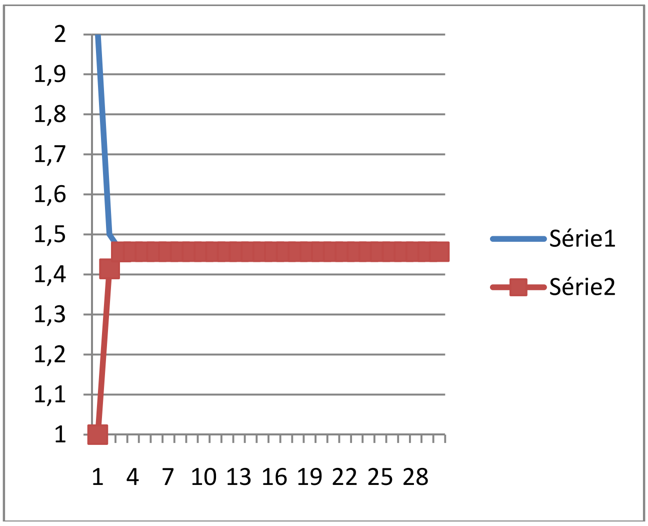
$u_{n+1}-v_{n+1}<\dfrac{u_n-v_n}{2}$ donc en partant du départ :

$$u_1-v_1<\frac{u_0-v_0}{2}\Rightarrow u_2-v_2<\frac{u_1-v_1}{2}<\frac{\frac{u_0-v_0}{2}}{2}=\frac{u_0-v_0}{2^2}$$

$$u_3-v_3<\frac{u_2-v_2}{2}<\frac{u_0-v_0}{2^3}\ldots u_n-v_n<\frac{u_0-v_0}{2^n}=\frac{1}{2^n}\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

3. La valeur de la limite n'est pas attendue… avec un tableur, on voit la convergence !

n	u	v
0	2	1
1	1,5	1,41421356
2	1,45710678	1,45647532
3	1,45679105	1,45679101
4	1,45679103	1,45679103
5	1,45679103	1,45679103
6	1,45679103	1,45679103
7	1,45679103	1,45679103
8	1,45679103	1,45679103
9	1,45679103	1,45679103
10	1,45679103	1,45679103



Exercice 92 : moins difficile que le précédent une fois qu'on a compris que chaque fois que l'on fait une différence plein de simplifications sont possibles ! On a là des suites certes « fonctionnelles » mais les outils sur les fonctions sont difficilement utilisables…

Objectif global : montrer qu'elles convergent vers une même limite (question 2)

Méthode : montrer que ce sont des suites adjacentes (3 contraintes)

- Comportement de u_n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}=\frac{(n+2)-2\sqrt{(n+2)(n+1)}+(n+1)}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}>0$$

donc croissante

- $$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{-2n-1+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}}=\frac{-\left((n+1)-2\sqrt{n(n+1)}+n\right)}{\sqrt{n+1}}=\frac{-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}}<0$$

la suite est décroissante

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}}\right)=0$ expression conjuguée…

Donc elles sont adjacentes et convergent vers une même limite… laquelle ? Cela n'est pas demandé !