

**EXERCICE 4**

**7 points**

1. On sait que cette équation a pour solutions les fonctions :  $x \mapsto Ke^{-\frac{x}{2}}$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

2.

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

a.  $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$  :  $f$  est un produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) + (2mx + p)e^{-\frac{x}{2}}.$$

$f$  est solution de  $E'$  si et seulement si  $2f' + f = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \iff$

$$-e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) + 2(2mx + p)e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \iff$$

$$-mx^2 - px + 4mx + 2p + mx^2 + px = x + 1 \iff 4mx + 2p = x + 1 \iff (4m - 1)x + (2p - 1) = 0.$$

Cette fonction affine est nulle si et seulement si  $4m - 1 = 0$  et  $2p - 1 = 0$ , soit si  $m = \frac{1}{4}$  et  $p = \frac{1}{2}$ .

b. On a :  $g$  et  $f$  solutions de  $E'$  si et seulement si

$$\begin{cases} 2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2f' + f = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \end{cases} \Rightarrow \text{(par différence)}$$

$$\begin{cases} 2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2(g' - f') + g - f = 0 \end{cases}$$

Donc  $g$  est solution de l'équation  $(E')$  si et seulement si  $g - f$  est solution de l'équation  $(E)$ . On a procédé par équivalence puisque le raisonnement est fondé sur une succession d'égalités, pour plus de clarté on peut le présenter en deux étapes : Hypothèse  $g$  et aussi  $f$  solutions de  $E'$  alors... puis  $g - f$  est solution de l'équation  $(E)$  on isole de la même façon pour avoir  $2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$  qui prouve que  $g$  est...

On a donc  $g(x) - f(x) = Ke^{-\frac{x}{2}}$  question (1) d'où  $g(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}(x^2 + 2x + K')$ ,  $K' \in \mathbb{R}$ .

3.  $h$  produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$h'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4} \left( -\frac{x^2}{2} - x + 2x + 2 \right) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4} \left( -\frac{x^2}{2} + x + 2 \right) \text{ qui est du signe du trinôme } -\frac{x^2}{2} + x + 2.$$

Pour ce trinôme  $\Delta = 1 + 4 = 5$ ; il a donc deux racines  $x_1 = 1 - \sqrt{5}$  et  $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ . Il est négatif (du signe de  $-\frac{x^2}{2}$ ) sauf entre les racines.

$h'(x)$  est donc négative sauf sur l'intervalle  $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$ .

$h$  est donc décroissante sauf sur  $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$  où elle est croissante.

4. • On saura (bientôt...) que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ , quel que soit le naturel  $x$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}x^2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} \times 2x = 0$ .

Conclusion :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

5. a. Étudions la fonction  $d$  définie par

$$d(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{4} \right) \text{ qui est du signe du trinôme } -x^2 - 2x + 4.$$

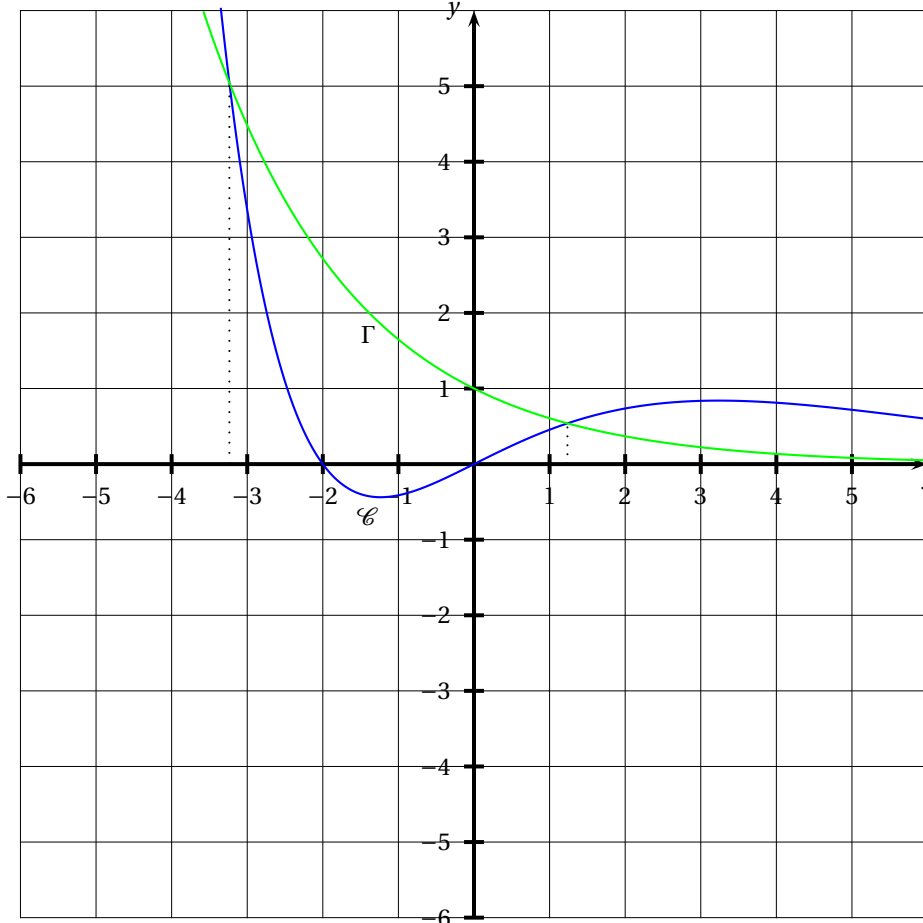
Pour ce trinôme  $\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$ . Il a donc pour racines

$x_1 = -1 - \sqrt{5}$  et  $x_2 = -1 + \sqrt{5}$ . Il est négatif sauf entre les deux racines.

Donc la fonction  $d$  est négative sauf sur l'intervalle  $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$ .

Conclusion : la courbe  $\Gamma$  est sous la courbe  $\mathcal{C}$  sauf entre  $-1 - \sqrt{5}$  et  $-1 + \sqrt{5}$ . Les deux courbes ayant deux points communs pour  $x = -1 - \sqrt{5}$  et  $x = -1 + \sqrt{5}$ .

b.



**EXERCICE 2**

**3 points**

**Commun à tous les candidats**

1. a. Comme  $x \neq 0$  et  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$ ,  $g$  est dérivable sur cet intervalle et  $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ .

Or  $f$  solution de (E) signifie que  $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2 \iff$

$\frac{xf'(x) - (2x+1)f(x)}{x^2} = 8$  (car  $x \neq 0$ )  $\iff \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{2f(x)}{x} = 8 \iff g'(x) - 2g(x) = 8$  qui signifie que la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle (E') :

$$y' = 2y + 8.$$

- b.  $h$  solution de (E') montre que  $h$  est dérivable, donc  $f$  aussi.

De  $f(x) = xh(x)$ , on tire  $f'(x) = h(x) + xh'(x)$ .

$h$  solution de (E')  $\iff h'(x) = 2h(x) + 8 \iff xh'(x) = 2xh(x) + 8x \iff f'(x) - h(x) = 2f(x) + 8x \iff xf'(x) = 2xf(x) + f(x) + 8x^2 \iff$

$xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$ , ce qui signifie que  $f$  est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résolution de  $y' = 2y + 8$  :

- On sait que la fonction constante  $x \mapsto -4$  est solution de l'équation ;

- Les solutions de l'équation  $y' = 2y$  sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ke^{2x}, K \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto Ke^{2x} - 4$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

3. Il faut chercher une fonction  $f$  de la forme  $f(x) = Kxe^{2x} - 4x$  telle que

$$f(\ln 2) = 0 \iff K \ln 2 e^{2 \ln 2} - 4 \ln 2 = 0 \iff K \ln 2 e^{\ln 2^2} - 4 \ln 2 = 0 \iff K \ln 2 e^{\ln 4} - 4 \ln 2 = 0 \iff 4K \ln 2 - 4 \ln 2 = 0 \iff 4K - 4 = 0 \iff K = 1.$$

Il existe bien une solution de (E) qui s'annule en  $\ln 2$  : la fonction

$$x \mapsto xe^{2x} - 4x.$$