

EXERCICE 1 - LA RÉUNION JUIN 2004

6 points

1. a. On a $[f(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + [f(x)]^2 \geq 1 \Rightarrow [f'(x)]^2 > 0$.
Conclusion : quel que soit x , $f'(x) \neq 0$.
- b. La première relation appliquée à $x = 0$ donne $[f(0)]^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
2. En dérivant la relation (1) :
 $2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0 \iff (\text{car } f'(x) \neq 0) f''(x) - f(x) = 0 \quad (4) \text{ quel que soit } x \in \mathbb{R}$.
3. $u = f + f'$ et $v = f' - f$.
 - a. $u(0) = f(0) + f'(0) = 0 + 1 = 1$
 $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.
 - b. f' étant dérivable, u et v le sont aussi :
 $u' = f'' + f' = f + f' = u$ et $v' = f'' - f' = f - f' = -v$.
 - c. On en déduit que $u = K_1 e^x$ et que $v = K_2 e^{-x}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
 - d. On a $u - v = f' + f - f' - (-f) = 2f \Rightarrow f = \frac{u - v}{2}$.
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. a. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Inversement comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- b. f somme de fonctions dérivables est dérivable sur \mathbb{R} et
 $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ car $e^u > 0$ quel que soit u . La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

5. a. D'après le tableau de variations précédent, la fonction f étant continue sur \mathbb{R} et croissante sur \mathbb{R} , l'équation $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$ a une solution unique α .
- b. Application : résolution de l'équation $f(x) = 3$.
On a $f(x) = 3 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \iff e^x - e^{-x} = 6 \iff e^x - \frac{1}{e^x} - 6 = 0 \iff [e^x]^2 - 6e^x - 1 = 0 \iff (e^x - 3)^2 - 9 - 1 = 0 \iff (e^x - 3)^2 - 10 = 0 \iff (e^x - 3 + \sqrt{10})(e^x - 3 - \sqrt{10}) = 0 \iff \begin{cases} e^x - 3 - \sqrt{10} = 0 \\ e^x - 3 + \sqrt{10} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x = 3 + \sqrt{10} \\ e^x = 3 - \sqrt{10} \end{cases}$
La deuxième équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} car $3 - \sqrt{10} < 0$.
La première implique en appliquant la fonction logarithme népérien : $x = \ln(3 + \sqrt{10})$.
Une calculatrice donne : $\alpha \approx 1,82$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 - LA RÉUNION JUIN 2005

4 points

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(-x)f(x)$.
 - a. La fonction est définie sur \mathbb{R} : comme le produit $f(-x)f'(x) = 1$, aucun de ces deux nombres ne peut être nul : la fonction ne peut s'annuler sur \mathbb{R} (et le graphe ne peut avoir de tangente horizontale).
 - b. La fonction f étant supposée dérivable, g l'est aussi et $g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x)$. Or $f(-x) \times f'(x) = 1$, vraie quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc est vraie pour la valeur $-x$, donc $f(x) \times f'(-x) = 1$.
On a donc $g'(x) = -1 + 1 = 0$.

c. Il en résulte que $g(x) = K (K \in \mathbb{R})$.

En particulier $g(0) = f(-0) \times f(0) = (-4)^2 = 16$. Donc $g(x) = f(-x)f(x) = 16$.

d. De $f(-x) \times f(x) = 16$ et $f(-x) \times f'(x) = 1$, on déduit que $f'(x) = \frac{1}{f(-x)}$ et $\frac{f(x)}{16} = \frac{1}{f(-x)}$ (car $f(-x) \neq 0$).

En comparant les deux égalités on obtient : $f'(x) = \frac{1}{16}f(x)$ qui signifie que f est une solution de l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$. De plus la condition initiale montre que $f(0) = -4$.

2. Question de cours

a. Classique on suppose l'existence d'une fonction g différente de $f(x) = e^{\frac{x}{16}}$ et on étudie la fonction $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ avec $f(x) \neq 0$ on dérive h la dérivée est nulle donc h est constante (K) alors la fonction g cherchée est égale à $g(x) = Kf(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$.

b. Si y est une solution de l'équation différentielle (E), $y = Ke^{\frac{x}{16}}$ et la condition initiale $y(0) = -4$ entraîne $y(0) = K = -4$. Finalement $y(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$.

3. D'après la question 1. $f(0) = -4$ et f est solution de (E). D'après la question 2. $f(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$. On peut calculer $f'(x) = -4 \times \frac{1}{16}e^{\frac{x}{16}} = -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}$. On vérifie que $f(-x) \times f'(x) = -4e^{-\frac{x}{16}} \times -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{16}} = 1$ et $f(0) = -4$. Conclusion : $f(x) = -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction de vérifiant les conditions (C).