

Correction pour le Test 6minutes page 69

I. Calculer l'expression des tangentes... : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et observez l'égalité !

II. Comparer signifié qu'il faut déterminer quand a-t-

on $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ ou le contraire ? y compris quand il y a

égalité. En bref c'est étudier le signe de la différence. Dans ce type d'exercice il est judicieux de se faire aider si c'est possible par la calculatrice, ci contre le graphe de

$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Etudions la fonction, étudier le signe

de sa dérivée n'est pas simple... Et en dérivant à nouveau ? Peut-on en déduire le sens de variation et ensuite le signe en « remontant », d'après le théorème de la bijection, à l'aide des limites en l'infini et les valeurs en 0.

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ mais cela n'est guère plus facile donc

étudions les dérivées suivantes... **sans abus non plus !**

On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$ donc $f'''(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

x	0	
$f'''(x)$	+	
$f''(x)$	-∞	+∞
$f'(x)$	+∞	+∞
$f(x)$	-∞	+∞

Bilan : pour $x \leq 0$ on a $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$ et le contraire pour... donc on déduit la position

respective de chaque fonction...

III. Transformez $\cos 2x$ grâce aux formules bien connues et traitez cela comme une équation du second degré.

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - 1 = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos x = X; 2X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1 \text{ et } X_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ seule la solution } X_2 \text{ acceptable car } |X_2| < 1 \end{cases}$$

IV. Etude du signe de $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = \tan x - 2x$; on calcule les dérivées et on fait un tableau de variation : $f'(x) = \tan^2 x$; $g'(x) = \tan^2 x - 1$ sans oublier que la fonction tangente est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ de 0

à +∞ donc positive, signe de la dérivée de f facile car c'est un carré, celui de g après factorisation

$g'(x) = (\tan x + 1)(\tan x - 1)$; $\tan x \leq 1$ pour $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ donc $g'(x) \leq 0$ puis en faisant remarquer que l'image de

0, la borne inférieure est, 0 donc pour f qui est croissante elle est positive et g est négative... monotonie.

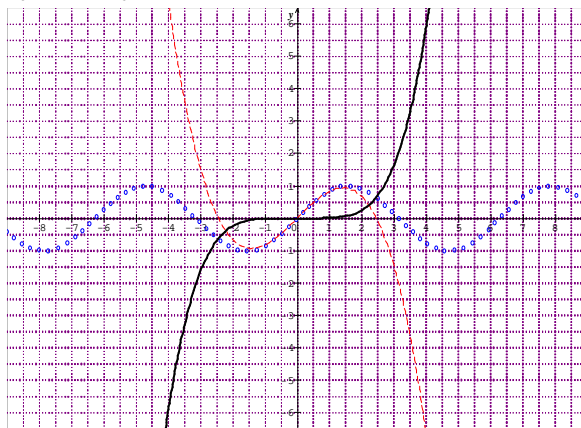
x	0	$\frac{\pi}{4}$	x	0	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	+		$g'(x)$	-	
$f(x)$	0	$1 - \frac{\pi}{4}$	$g(x)$	0	$1 - \frac{\pi}{2}$

V. a) $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ seule solution dans $[0; \frac{\pi}{2}[$ encore une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R}_+ .

b) la question a) utile pour le signe de $\tan x - \sqrt{3}$ puisque la fonction tangente est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ de 0 à $\sqrt{3}$

donc $\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ etc. c) En dérivant f on retrouve le calcul du b) mais élevé au carré...

VI. Classique : domaine de définition, dérivation et signe de la dérivée sans problème ; définition de l'asymptote petit problème, il s'agit de chercher la limite de $f(x) - (x - 1)$ en l'infini et trouver 0 ; pensez à l'expression conjuguée !



$f''(x) = -\sin x + x$ et puis encore

$f'''(x) = -\cos x + 1$