ELEMENTS DE CORRECTION FEUILLE D'EXERCICES « Calculs de limites »

1. Faits en classe… revenons sur :

   g) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+x \; en -\infty$ forme indéterminée bien sur ! Mais le conjugué ne suffit pas même s'il est nécessaire : $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+x=\dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x}=\dfrac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x}$ à ce stade on a encore une forme indéterminée $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ on cherche à factoriser au dénominateur :

   $$\frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x}=\frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x}=\frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x}=\frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+1\right)}$$ ce qui

   donne comme limite en - ∞ : -1 après simplification… car $\boxed{Si\ x<0\ alors\ |x|=-x}$

2. Composition de limites… vu en classe…
3. Les gendarmes :
   a. Utiliser le fait que : $-1\le \cos x\le 1$ donc $\dfrac{3x-1}{x}\le\dfrac{3x\cos x}{x}\le f(x)\le\dfrac{3x+7}{x-1}$ donc les deux termes qui encadrent tendent vers 3 qui est la limite…
   b. La valeur absolue est positive et c'est une distance donc on calcule la distance entre *f(x)* et 3 quand *x* tend vers +∞ : $0\le|f(x)-3|\le\dfrac{1}{x+1}$ on conclut avec le théorème des gend…
   c. Conséquence de la conservation de l'ordre par passage à la limite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4}x^2\le\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4}x^2=+\infty$ donc à plus forte raison pour *f(x)*…
   d. Partons de $-1\le\sin x\le 1$ alors $-5\le-5\sin x\le 5$ et $x^2-5\le x^2-5\sin x\le x^2+5$ on applique le théorème des gend… $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\dfrac{2x-1}{x-1}\le g(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$ la limite est 2 ; $\dfrac{-1}{x}\le h(x)\le\dfrac{1}{x}$ donc la limite est 0.
   e. Partons de $-1\le\sin x\le 1$ alors $-1\le-\sin x\le 1\Rightarrow 2-1\le 2-\sin x\le 2+1\Rightarrow\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le 1$ on a donc m = 1/3 et M = 1 comme au voisinage de l'inini on a $x+\sin x>0$ l'inégalité devient : $\dfrac{x+\sin x}{3}\le\dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}\le x+\sin x$ les termes qui encadrent tendent vers +∞ donc…

<u>« Pour les gourmands (ou les gourmets ?) »</u>

- déterminer la limite en 1 de la fonction définie par *f(x)* = $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$, puis trouver un réel a tel que, si $x\in$] 1-a ; 1+a [, alors *f(x) > 1000*

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}=+\infty$, donc la valeur de *f(x)* devient très grande rien d'étonnant à ce qu'elle dépasse 1000 mais à partir de quelle valeur de *x* proche de 1 ? Tel est le fond de la question.

Au voisinage de 1, $x = 1 + a$ ou $x = 1 - a$ ($a > 0$) avec a qui tend vers 0. on remplace x par $1 + a$ (a réel)

on a donc à calculer : $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{2(a+1)+1}{(a+1-1)^2}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{2a+3}{a^2}$ résolvons donc

$\dfrac{2a+3}{a^2}>1000 \Leftrightarrow a\in\left]\dfrac{2-\sqrt{12004}}{2000};\dfrac{2+\sqrt{12004}}{2000}\right[$ ce qui donne environ $a\in]-0,053;0,055[$ après résolution de l'inéquation du second degré…

- déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+3}$, puis trouver un réel A tel que , si $x > A$, alors $f(x) \in\ ]-2,05 ;\ -1,95[$

Tout d'abord contrôlons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+1}{x+3}=-2$, on cherche à partir de quelle valeur A pour x on est à moins de 0,05 de la limite 2. Donc on doit avoir $\dfrac{-2x+1}{x+3}-(-2)<0,05 \Leftrightarrow \dfrac{7}{x+3}<0,05$ résolvons l'inéquation

$\dfrac{7}{x+3}<0,05 \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{7}>\dfrac{100}{5} \Leftrightarrow x>137$

Asymptotes ? c'est un problème de limite !

Horizontale : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=k; k\in\mathbb{R}$ ou (exclusif) **Asymptote oblique** : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-y\right)=0$ alors…

Verticale (valeur interdite du domaine de définition) : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ alors x = a est l'équation de l'asy….

1. *f, f, h, k,* répondent aux règles sur les polynômes sur les limites en l'infini, seule *k* n'a pas d'asymptote du tout, les autres ont des asymptotes horizontales et *g* a deux asymptotes verticales et *h* une.…

Pour *j* il faut composer les limites : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1 ; \lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X}=1\ avec\ X=\dfrac{x-1}{x+1}$ il y a une asymptote verticale : $x = -1$; pour m deux verticales en 2 et -2 et une horizontale ; pour p une asymptote oblique déjà prête : y = 3x – 4 et une verticale…

2. **Identification** : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}=ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{ax^2+x(-a+b)+(c-b)}{x-1}$ donc on résout le système : $\begin{cases}a=1\\-a+b=-3\\c-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=-1\end{cases}$ donc on a $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x-1}$; il y a $x = 1$ comme asymptote verticale et on démontre que $y = x - 2$ est asymptote oblique car $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-y\right)=0$.

3. Cherchons : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0^+$ l'expression conj…

   Pour l'asymptote oblique proposée démontrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0^+$ encore l'expression conj…