

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

Du papier millimétré est fourni pour les exercices 1, 2 et 5.

L'usage de la calculatrice est autorisé (circulaire n° 99-186 du 16-11-1999)

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice 1 (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , (unité graphique : 2 cm).
On considère la suite de nombres complexes définie par :

$$z_0 = 4 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

1. On appelle M_n le point du plan complexe d'affixe z_n .
1. a. Déterminer la forme algébrique des nombres : z_1, z_2 et z_3 .
1. b. Construire, dans le plan complexe, les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .
2. Écrire le nombre $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme trigonométrique.
3. En utilisant la question 2., écrire z_{n+3} en fonction de z_n .

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ et $\overrightarrow{OM_n}$?

Construire alors, dans le plan complexe, les points M_4 et M_5 .

4. On note ρ_n le module du nombre z_n .
4. a. Démontrer que la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique. Préciser sa raison.
4. b. Déterminer la limite de la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbf{N}}$, quand n tend vers $+\infty$?

Que devient le point M_n , quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 (10 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ayant comme unité graphique 2 cm.

- Résoudre dans \mathbf{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Écrire a et b sous forme trigonométrique et placer les points A et B d'affixes respectives a et b .
- Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r . Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.
 - Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h . Placer B' sur la figure précédente.
- Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C .
 - Justifier les égalités suivantes : $c\bar{c} = R^2$; $(c-2i)(\bar{c}+2i) = R^2$; $\left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$
 - En déduire que $c - \bar{c} = 2i$, puis que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
 - En déduire l'affixe du point C et la valeur de R .

Exercice 3 (8 points)

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) des nombres réels strictement positifs par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

- Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.
 - Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.
 - Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.
 - En déduire que si $n \geq N$ alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.
- On pose, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.
On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est convergente.
 - Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times u_5$.
 - Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.
 - En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$.
- Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ converge.

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations qui suivent, indiquer son numéro, puis dire si elle est vraie ou fausse. Une affirmation considérée correcte sera affirmée vraie sans justification ; une affirmation considérée incorrecte sera prouvée fausse par un contre-exemple.

Toute bonne réponse vaut 0,5 point ; toute mauvaise réponse enlève 0,25 point ; toute absence de réponse vaut 0 point ; la note globale de l'exercice ne peut être que positive ou nulle.

Numéro	Affirmation
1	Toute suite arithmétique de raison négative est décroissante.
2	La suite géométrique de raison 0,45 et de premier terme 1 est décroissante.
3	Toute suite géométrique de raison négative est décroissante.
4	La somme des 8 premiers termes de la suite géométrique de 1 ^{er} terme $-\frac{1}{9}$ et de raison $-\sqrt{3}$ vaut $\frac{40}{9}(\sqrt{3}-1)$.
5	Toute suite géométrique de raison $-0,5$ est convergente vers 0.
6	Toute suite géométrique de raison inférieure à 1 converge vers 0.
7	Toute suite géométrique de raison inférieure à 1 est décroissante.
8	Si M est un majorant de la suite croissante (u_n) , alors la suite (u_n) converge vers M .
9	Si, pour tout naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
10	Si, pour tout naturel non nul n , on a $2 - \frac{1}{n} < u_n < \frac{2n+5}{n+1}$, alors (u_n) converge vers 2.

Exercice 5 (10 points)

Soit l'application f de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par :

$$x \mapsto f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}.$$

- Démontrer que f est décroissante sur \mathbf{R} à l'aide du signe de $f'(x)$.
- Étudier les limites de f au voisinage de l'infini et démontrer que la courbe (C) représentative de f admet pour asymptotes la droite d'équation $y = -2x$ et l'axe des abscisses.
- Étudier les variations de f .
- Tracer (C) dans un repère orthonormé. (On prendra 2 cm pour unité graphique.).
- En utilisant le tableau de variation de f , démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1 ; 2]$ on a : $1 \leq f(x) \leq 2$.
- Démontrer que si $x \in [1 ; 2]$ alors $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. On pourra étudier le sens de variation de f' .
- On note (u_n) la suite telle que : $u_0 = 1$ et pour tout n de \mathbf{N} : $u_{n+1} = -u_n + \sqrt{u_n^2 + 8}$. En utilisant la question 5, montrer par récurrence que, pour tout entier n , $1 \leq u_n \leq 2$.
- Peut-on avec le résultat précédent conclure la convergence de la suite (u_n) ? A l'aide de votre graphique et de la droite d'équation $y = x$, quelle conjecture sur la convergence de (u_n) proposez-vous ?